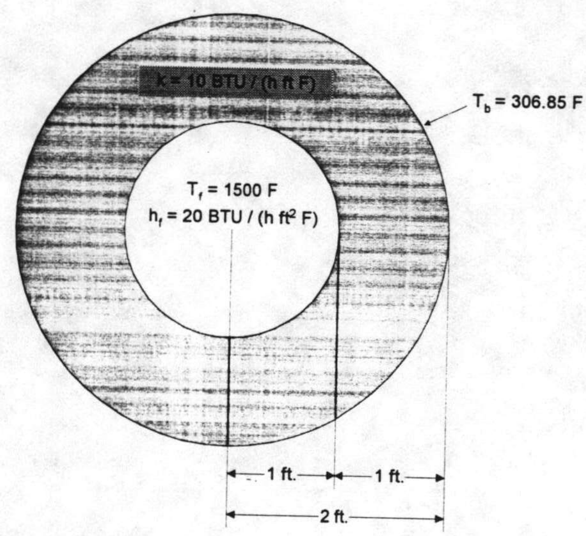
บทที่ 5

การใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการถ่ายโอนความร้อน

ในบทนี้จะพิจารณาปัญหาการนำความร้อนในท่อทรงกระบอกที่มีสภาวะขอบเขตเป็นการพาความร้อนและอุณหภูมิคงที่โดยจะหาผลเฉลยโดยวิธีวิเคราะห์และวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ ผลเฉลยจากวิธีวิเคราะห์จะใช้ในการหาค่าผิดพลาดของผลเฉลยโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

<u>ปัญหาการถ่ายโอนความร้อน</u>



ให้หาการกระจายอุณหภูมิในสภาวะคงของผนังท่อทรงกระบอก ภายในท่อมีของเหลวร้อนไหลอยู่ อุณหภูมิของของเหลว $T_f = 1500$ °F, $h_f = 20$ Btu/(h ft^2 °F) ภายนอกท่อมีอุณหภูมิคงที่ $T_b = 306.8528$ °F ท่อมีรัศมีภายใน $r_1 = 1$ ft. และรัศมีภายนอก $r_2 = 2$ ft. (จาก Baker, 1991)

<u>วิธีการวิเคราะห์ (analytical method)</u>

สมการการถ่ายเทความร้อนในระบบแกนทรงกระบอก (cylindrical coordinate) มีรูปแบบคือ

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rk\frac{dT}{dr}\right]-s=0 \qquad (5.1)$$

$$\frac{d}{dr}\left[rk\frac{dT}{dr}\right] = -sr$$

$$\int d\left[rk\frac{dT}{dr}\right] = -s\int r\,dr$$

$$rk\frac{dT}{dr} = -\frac{sr^2}{2} + C_1 \qquad (5.2)$$

<u>B.C.1</u> on $\partial\,\Omega_1$ $\quad r = r_1, \quad T = T_1, \quad -k\frac{dT}{dr} = h(T_r - T_1)$

$$r_1\left[k\frac{dT}{dr}\right] = -\frac{sr_1^2}{2} + C_1$$

$$-r_1 h(T_1 - T_r) = -\frac{sr_1^2}{2} + C_1$$

$$C_1 = \frac{sr_1^2}{2} - r_1 h(T_r - T_1) \qquad (5.3)$$

จากสมการ 5.2

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{sr}{2k} + \frac{C_1}{rk}$$

$$\int dT = -\frac{s}{2k}\int r\,dr + \frac{C_1}{k}\int \frac{1}{r}dr$$

$$T = -\frac{sr^2}{4k} + \frac{C_1}{k}\ln r + C_2 \qquad (5.4)$$

<u>B.C.2</u> on $\partial\,\Omega_2$ $\quad r = r_2, \quad T = T_2 = T_b$

$$C_2 = T_b + \frac{sr_2^2}{4k} - \frac{C_1}{k}\ln r_2 \qquad (5.5)$$

แทนค่า C_1 และ C_2

$$T = -\frac{sr^2}{4k} + \frac{1}{k}\left[\frac{sr_1^2}{2} - r_1 h(T_r - T_1)\right]\ln r + T_b + \frac{sr_2^2}{4k} - \frac{1}{k}\left[\frac{sr_1^2}{2} - r_1 h(T_r - T_1)\right]\ln r_2$$

$$= \frac{s}{4k}(r_2^2 - r^2) + \left[\frac{sr_1^2}{2k} - \frac{r_1 h}{k}(T_r - T_1)\right]\ln\frac{r}{r_2} + T_b \qquad (5.6)$$

ซึ่งเป็นคำตอบแม่นตรงของปัญหา และจะใช้ในการเปรียบเทียบกับคำตอบโดยประมาณโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีทางเชิงเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณ โดยแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (element) เอลิเมนต์หล่านี้อาจอยู่ในรูปลักษณะสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า รวมทั้งอาจมีขนาดของเอลิเมนต์ต่างกันในตำแหน่งต่าง ๆ เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณหาค่าตัวแปรตามที่ต้องการ

ในวิธีการผลต่างสืบเนื่องจะแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นช่องตารางสี่เหลี่ยม ช่องตารางสี่เหลี่ยมเหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ มีข้อดีคือเป็นวิธีการที่ง่ายสำหรับการศึกษาทำความเข้าใจรวมไปถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณผลเฉลย แต่ข้อเสียก็คือวิธีการนี้อาจจะไม่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้เช่นเมื่อปัญหาที่ต้องการคำนวณมีรูปร่างลักษณะเป็นเส้นโค้ง หากใช้ขนาดตารางสี่เหลี่ยมให้มีขนาดเล็กลงเพื่อให้สามารถจำลองรูปร่างดั้งเดิมที่แท้จริงให้ใกล้เคียงมากยิ่งขึ้นจะทำให้จำนวนจุดต่อเพิ่มมากขึ้นซึ่งทำให้จำนวนสมการผลต่างสืบเนื่องมากขึ้นด้วย สิ่งนี้ทำให้ความต้องการใช้หน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณสูงมากขึ้น

จากข้อแตกต่างของสองวิธีนี้ทำให้เห็นได้ว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมของปัญหาได้เป็นอย่างดี ปัญหาจะถูกแก้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีรูปร่างใกล้เคียงกับของจริงมากที่สุด ดังนั้นผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณออกมาจะมีความแม่นยำมากขึ้นตามไปด้วย

ความแม่นยำของผลเฉลยโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ รูปแบบของฟังก์ชั่นการประมาณภายใน (interpolation function) ที่ใช้กับแต่ละเอลิเมนต์ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2537)

1. <u>ขั้นตอนทั่วไปของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์</u> (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2537)

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอนดังนี้

1. แบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ
2. เลือกฟังก์ชั่นประมาณภายในเอลิเมนต์
3. สร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equation) ซึ่งสามารถทำได้โดย

3.1 วิธีการโดยตรง (direct approach) วิธีการโดยตรงสร้างสมการขึ้นมาสำหรับเอลิเมนต์ต่าง ๆ จากความเข้าใจในปัญหาที่ทำการศึกษา โดยทั่วไปจะสามารถใช้ได้แต่เฉพาะปัญหาที่ง่าย ๆ เช่นปัญหาในรูปทรงหนึ่งมิติ หากเป็นปัญหาสองหรือสามมิติ จำเป็นต้องนำพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการสร้างสมการของเอลิเมนต์

3.2 วิธีการแปรผัน (variational approach) เป็นวิธีการดังเดิมที่ใช้ในช่วงต้น ๆ ของการพัฒนาการวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจะเน้นหนักไปในปัญหาที่เกี่ยวกับทางด้านโครงสร้าง (structure analysis) โดยจะต้องรู้ฟังก์ชั่นแปรผันที่สอดคล้องกับปัญหาที่จะแก้นั้น

3.3 วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) โดยปกติปัญหาทั่ว ๆ ไปในทางปฏิบัติจะรู้เพียงแต่สมการเชิงอนุพันธ์ และไม่สามารถหาฟังก์ชั่นแปรผันที่สอดคล้องได้ วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากการใช้สมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง จึงสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาทั่ว ๆ ไป เช่น ปัญหาทางด้านโครงสร้าง การถ่ายเทความร้อน และการไหล ฯลฯ วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเป็นวิธีการที่ง่ายในการทำความเข้าใจ และมีกระบวนการที่เป็นมาตรฐาน สามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาโดยทั่วไปได้โดยง่าย

4. นำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้น (system of simultaneous equations)

5. ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในระบบสมการแล้วจึงแก้สมการเพื่อหาตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

6. คำนวณหาค่าอื่นที่ต้องการทราบต่อไปหลังจากทราบตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ

2. วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

เพื่อแสดงถึงการใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้ตัวอย่างการคำนวณการกระจายอุณหภูมิในผนังหนาเพื่อให้เห็นขั้นตอนของการใช้วิธีนี้

ตัวอย่างปัญหาการถ่ายเทความร้อน (Baker, 1991)

จงหาการกระจายอุณภูมิของผนังหนา (slab) ที่มีค่าการนำความร้อน $k(x)$ ผนังได้รับกระแสความร้อน q ที่ผิว $x = a$ ด้าน $x = b$ ถูกทำให้มีอุณหภูมิคงที่ $T = T_b$ และให้ $s = s(x)$ เป็น heat generation ภายใน สมมติให้ k และ s เป็นค่าคงที่

ให้ L(T) เป็นสมการการถ่ายเทความร้อน

$$L(T) = -\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) - s = 0\,, \quad a < x < b \tag{5.7}$$

มีสภาวะขอบเขตดังนี้

$$l(T) = -k\frac{dT}{dx} - q = 0\,, \quad a < x < b \tag{5.8}$$

$$T = T_b \tag{5.9}$$

เมื่อให้จุดกำเนิด (origin) เลื่อนไปอยู่ที่ a นั่นคือ a = 0 และ L = b - a สมการ 5.7 - 5.9 มีคำตอบแม่นตรงคือ

$$T(x) = \frac{sL^2}{2k}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] + \frac{qL}{k}\left(1-\frac{x}{L}\right) + T_b \tag{5.10}$$

คำตอบโดยประมาณของปัญหานี้ในรูปของอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) คือ

$$T^N(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\,\phi_i \tag{5.11}$$

โดยกำหนดสัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังนี้

a_i	ตัวคงที่ไม่รู้ค่า
ϕ_i	ฟังก์ชั่นทดลอง (trial function)
N	จำนวนพจน์ที่ใช้ในการประมาณค่า มีจำนวนเท่ากับจำนวนจุดต่อ
T(x)	คำตอบแท้จริง (exact solution)
$T^N(x)$	เป็นคำตอบโดยประมาณ (approximation solution)

ความสัมพันธ์ระหว่างคำตอบแท้จริงและคำตอบโดยประมาณอยู่ในรูป

$$T(x) = T^N(x) + e^N(x) \tag{5.12}$$

เมื่อ $e^N(x)$ เป็นค่าผิดพลาดซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ x

แทน T(x) ในสมการ 5.7 จะได้

$$L(e^N) = L(T) - L(T^N) = -L(T^N) \tag{5.13}$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าผิดพลาดกับคำตอบโดยประมาณ

จากสมการ 5.7 L(T) = 0 แต่เนื่องจาก $L(T^N)$ จะมีค่าผิดพลาด จึงได้ว่า

$$L(T^N) = -\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT^N}{dx}\right) - s \neq 0 \tag{5.14}$$

$$= R$$

R คือเศษตกค้าง (residual) และเรียก $L(T^N)$ ว่าฟังก์ชั่นเศษตกค้าง

เพื่อให้คำตอบโดยประมาณมีค่าผิดพลาดน้อย โดยวิธีของกาเลอร์คิน (Garlerkin) จะใช้ฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนักคูณกับฟังก์ชั่นเศษตกค้าง จากนั้นทำการอินทีเกรตตลอดทั้งโดเมนแล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์

$$\int_{\Omega} w_i(x) L(T^N) dx \equiv 0\,, \quad 1 \le i \le N \tag{5.15}$$

โดยกำหนดให้ฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนักเท่ากับฟังก์ชั่นทดลองนั่นเอง

$$w_i(x) \equiv \phi_i(x) \tag{5.16}$$

ดังนั้นจะทำให้สมการ 5.15 เป็น

$$\int \phi_i(x) \left[-\frac{d}{dx}\left(k \frac{dT^N}{dx} \right) - s \right] dx \equiv 0\,, \quad 1 \le i \le N \tag{5.17}$$

ทำการอินทีเกรตทีละส่วน (integration by part) สมการ 5.17 จะได้

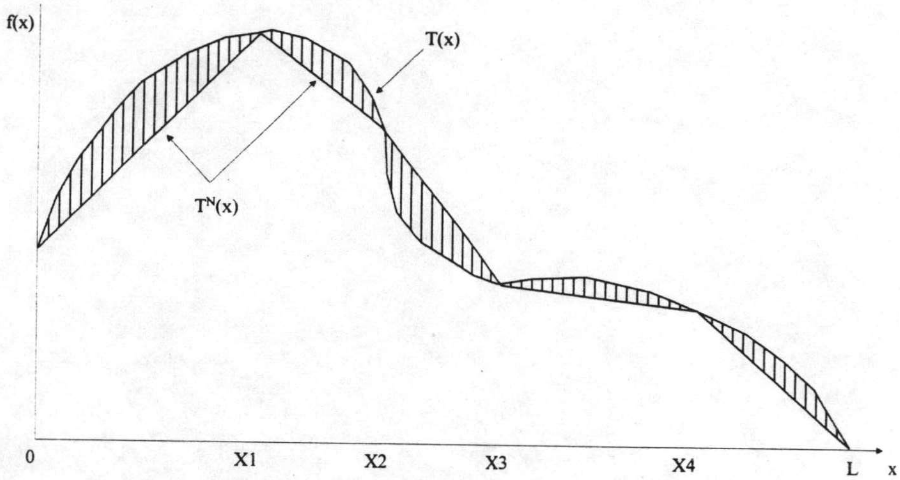
$$S = \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{dT^N}{dx} dx - \int_0^L \phi_i s\, dx - \phi_i k \frac{dT^N}{dx} \bigg|_0^L = 0\,, \quad 1 \le i \le N \tag{5.18}$$

สมการ 5.18 เรียกว่าสมการลดอันดับกาเลอร์คิน (Garlerkin weak statement) เนื่องจากอันดับของอนุพันธ์ T^N ลดลงจากอันดับสองเป็นอันดับหนึ่ง

แทนสมการ 5.11 ในสมการ 5.18 และเปลี่ยนดัชนีการรวม (summation index) i ในสมการ 5.11 เป็น j เพื่อป้องกันการสับสน จะได้

$$S = \sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_j}{dx} dx \right) - \int_0^L s\phi_i dx - q\phi_i \big|_{x=0} = 0\,, \quad 1 \le i \le N \tag{5.19}$$

คำตอบโดยประมาณ $T^N(x)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (piecewise continuous) ตลอดโดเมน หากเลือกฟังก์ชั่นทดลอง $\phi_i(x)$ เป็นเชิงเส้น คำตอบโดยประมาณ $T^N(x)$ จะมีลักษณะเป็นดังรูป 5.1 ซึ่งเหมือนการประมาณค่าภายในลากรานจ์ (Lagrange interpolation) ที่เชื่อมระหว่างจุดต่อต่าง ๆ ในโดเมน



รูปที่ 5.1 คำตอบแม่นตรง T(x) และคำตอบโดยประมาณ $T^N(x)$

หลักการสำคัญข้อหนึ่งของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหา (discretization) หรือแบ่งโดเมนออกเป็นช่วง ๆ ในรูป 5.2 จะแบ่งโดเมนออกเป็น 2 ช่วงหรือเอลิเมนต์

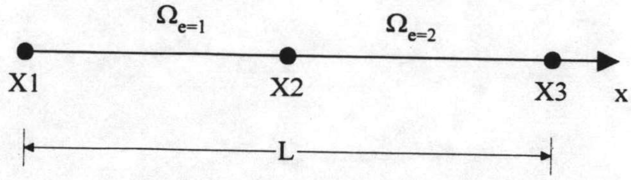
จุดต่อที่เกิดจากการแบ่งคือ X1, X2 และ X3 โพลิโนเมียลเชิงเส้นที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ X2 เป็นคือ

$$\phi_2 = \begin{cases} \dfrac{x - X1}{X2 - X1}, & X1 \le x \le X2 \\ \dfrac{X3 - x}{X3 - X2}, & X2 \le x \le X \\ 0 \quad , & x \le X1 \end{cases} \tag{5.20}$$

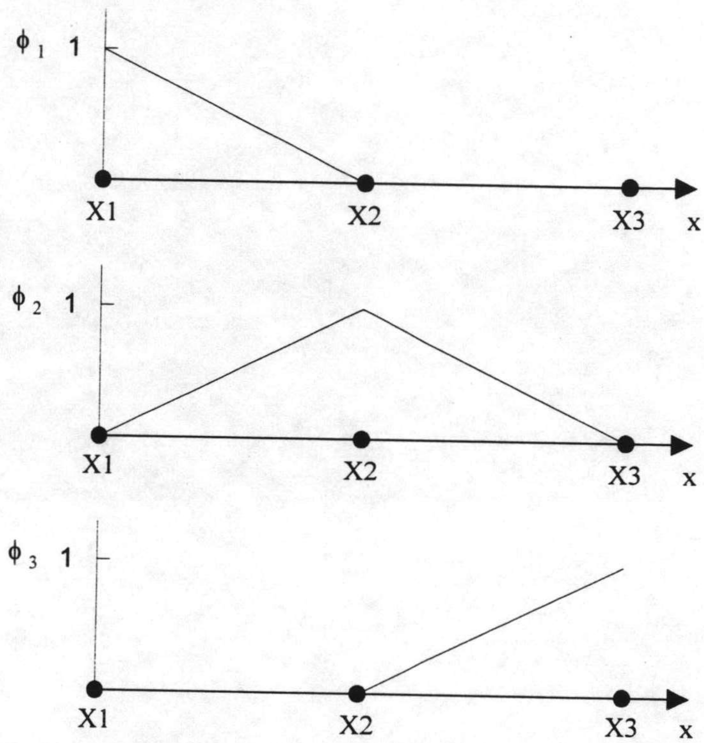
เมื่อนำสมการ 5.20 ไปพลอตจะได้ดังรูป 5.2 b

คำตอบประมาณ $T^N(X)$ เมื่อแบ่งโดเมนออกเป็น 2 เอลิเมนต์และมีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 3 คือ

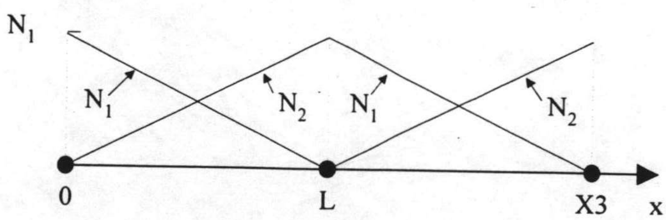
$$T^N(x) \equiv \sum_{i=1}^{N=3} a_i \phi_i(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) \tag{5.21}$$



(a) การแบ่งรูปร่างลักษณะหรือโดเมนออกเป็น 2 ส่วน



(b) ชุดของฟังก์ชั่นทดลอง ϕ_i , $1 \leq i \leq 3$



(c) ฟังก์ชั่นพื้นฐาน N_i

รูปที่ 5.2 แสดงการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาหรือโดเมนออกเป็นส่วน ๆ

จากรูป 5.2 (b) ตลอดทั้งโดเมนจะประกอบด้วยฟังก์ชั่นทดลอง 3 ฟังก์ชั่น วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะพุ่งความสนใจไปที่เอลิเมนต์ทั่วไป Ω_e เมื่อพิจารณาดูในแต่ละเอลิเมนต์จะพบว่าเส้นตรง 2 เส้นที่ประกอบกันเป็น $\phi_i(x)$ มีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{XR - x}{XR - XL} \\ N_2 &= \frac{x - XL}{XR - XL} \end{aligned} \tag{5.22}$$

โดย XL คือ x-left และ XR คือ x-right เรียกฟังก์ชั่นเส้นตรงสองฟังก์ชั่นนี้ว่า <u>พังก์ชั่นพื้นฐาน</u> (finite element basis) หรือ <u>ฟังก์ชั่นประมาณภายในเอลิเมนต์</u>

ค่าอุณหภูมิประมาณในแต่ละเอลิเมนต์สามารถเขียนได้เป็น

$$T_e = N_1 Q_1 + N_2 Q_2 = \sum_{j=1}^{2} N_j Q_j^e \tag{5.23}$$

Q1 และ Q2 เป็นค่าอุณหภูมิที่จุดต่อทางซ้ายและทางขวาของเอลิเมนต์ตามลำดับ

คำตอบประมาณ $T^N(X)$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} T^N(x) &= \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x) \\ &= \sum_{e=1}^{M} \sum_{j=1}^{2} N_j(x) Q_j^e \end{aligned} \tag{5.24}$$

ในสมการ 5.24 M แทนจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด เมื่อแทนสมการนี้ลงในสมการลดอันดับกาเลอร์คิน 5.17 ก็จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปของผลรวมเอลิเมนต์จำนวน M เอลิเมนต์

$$\begin{aligned} S^h = \sum_{e=1}^{M} \Bigg[& \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega_e} \frac{dN_i}{dx} k \frac{dN_j}{dx} dx\, Q_j^e - \int_{\Omega_e} N_i s\, dx \\ & - k \frac{dT}{dx} N_i \delta_{eM} + k \frac{dT}{dx} N_i \delta_{e1} \Bigg], \qquad 1 \le i \le 2 \end{aligned} \tag{5.25}$$

ถ้าให้ l = (XR - XL) แทนความยาวของเอลิเมนต์ ค่าอนุพันธ์ของ N จะเป็นดังนี้

$$\frac{dN_i}{dx} = \begin{cases} -1/l_e, & i = 1 \\ 1/l_e, & i = 2 \end{cases} \tag{5.26}$$

อินทีแกรนพจน์แรกในสมการ 5.25 เขียนให้สั้นกะทัดรัดได้ในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$\int_{\Omega_e} \frac{dN_i}{dx} k \frac{dN_j}{dx} dx\, Q_j^e = k \int_0^{l_e} \frac{1}{l_e}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{l_e} \{-1, \quad 1\} dx\, \{Q\}_e$$

$$= \frac{k}{l_e^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{l_e} dx\, \{Q\}_e$$

$$= \frac{k}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\}_e \tag{5.27}$$

พจน์แหล่งกำเนิดความร้อน (heat generation) เขียนได้ดังนี้

$$\int_{\Omega_e} N_i\, s\, dx = s \int_0^{l_e} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dx = \frac{s l_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

สมการ 5.27 - 5.28 ทำให้สมการลดอันดับกาเลอร์คินเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$S^h = \sum_{e=1}^{M} WS_e$$

$$= \sum_{e=1}^{M} \left(\frac{k}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\}_e - \frac{s l_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - k \frac{dT}{dx} \begin{Bmatrix} -\delta_{e1} \\ \delta_{eM} \end{Bmatrix} \right) = \{0 \tag{5.29}$$

สำหรับการแบ่งรูปร่างลักษณะปัญหาออกเป็น 2 ส่วน การคำนวณในแต่ละเอลิเมนต์เป็นดังนี้

$$WS_1 = \frac{k}{l_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\}_{e=1} - \frac{s l_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - k \frac{dT}{dx} \begin{Bmatrix} -\delta_{11} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{k}{L/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\}_1 - \frac{s\, L/2}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - q \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.30 a}$$

$$S_2 = \frac{k}{l_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\}_2 - \frac{s l_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - k \frac{dT}{dx} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\delta_{22} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{2k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\}_2 - \frac{s\, L}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - k \frac{dT}{dx} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.30 b}$$

สัญลักษณ์ $\sum$ ในสมการ 5.29 เป็นการรวมสมการ(เมตริกซ์)เอลิเมนต์ตามแถวหรือจุดต่อที่เอลิเมนต์นั้นเกี่ยวข้องซึ่งเรียกว่า<u>การประกอบ</u> (assembly) เมื่อให้ Q1, Q2 และ Q3 แทนอุณหภูมิจุดต่อที่ไม่ทราบค่า สมการ 5.29 มีมิติเป็น 3 x 3 และเขียนได้ในรูป

$$[K]\begin{Bmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \end{Bmatrix} = \{b\} \tag{5.31}$$

เมตริกซ์แถวตั้ง {b} เรียกว่าโหลดเมตริกซ์รวม (global load matrix) ซึ่งเป็นข้อมูลที่ทราบค่า และ [K] เรียกว่าเมตริกซ์การนำความร้อนรวม (global diffusion matrix)

เนื่องจาก $\{Q\}_{e=1}$ ประกอบด้วย $\{Q1, Q2\}^T$ และ $\{Q\}_{e=2}$ มีสมาชิกเป็น $\{Q2, Q3\}^T$ การนำ $\{K\}_e$ มารวมกันในสมการเมตริกซ์รวมต้องขยายอันดับเมตริกซ์ในแต่ละเอลิเมนต์ให้เป็น 3 ก่อน

$$[K] = \sum_{e=1}^{M}[K]_e$$

$$= \frac{2k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{2k}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

โหลดเมตริกซ์ก็ทำในทำนองเดียวกัน

$$\{b\} = \sum_{e=1}^{2}\{b\}_e$$

$$= \frac{sL}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{sL}{4}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k\dfrac{dT}{dx} \end{Bmatrix} \tag{5.33}$$

หารตลอดสมการ 5.32 ถึง 5.33 ด้วย 2k/L จะได้สมการเมตริกซ์รวมดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \end{Bmatrix} = \frac{sL^2}{8k}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{L}{2k}\begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ k\dfrac{dT}{dx} \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

สมการ 5.34 สามารถแก้สมการหาค่าอุณหภูมิได้อย่างตรงไปตรงมา แต่จากข้อกำหนดสภาวะขอบ Q3 = T_b ในสมการ 5.9 จึงต้องประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตนี้ลงในระบบสมการรวมก่อน นั่นคือ เปลี่ยนแถวที่ 3 ของสมการ 5.34

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{sL}{4} + q\right) \\ sL^2 / 4k \\ T_b \end{Bmatrix} \tag{5.35}$$

สมการ 5.35 สามารถลดอันดับลงเหลือ rank เท่ากับ 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q1 \\ Q2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{sL}{4}+q\right) \\ \dfrac{sL^2}{4k}+T_b \end{Bmatrix} \tag{5.36}$$

ซึ่งหาคำตอบได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} Q1 \\ Q2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{sL}{4}+q\right) \\ \dfrac{sL^2}{4k}+T_b \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{L}{2k}\left(\dfrac{sL}{4}+q\right) \\ \dfrac{sL^2}{4k}+T_b \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \dfrac{sL^2}{2k}+\dfrac{qL}{k}+T_b \\ \dfrac{3sL^2}{8k}+\dfrac{qL}{2k}+T_b \end{Bmatrix} \tag{5.37}$$

ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อทั้งหมดคือ

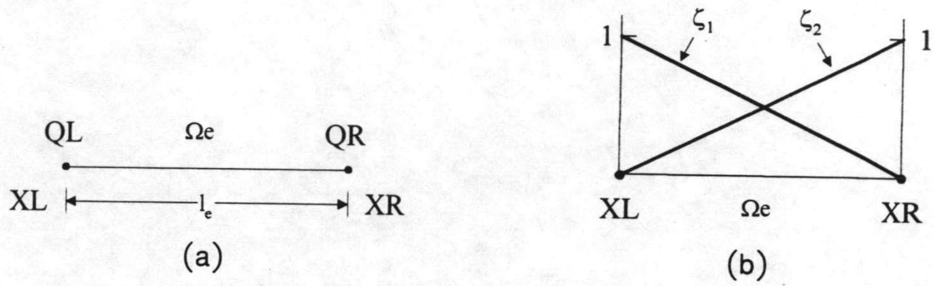
$$\begin{aligned} Q1 &= \frac{sL^2}{2k}+\frac{qL}{k}+T_b \\ Q2 &= \frac{3sL^2}{8k}+\frac{qL}{2k}+T_b \\ Q3 &= T_b \end{aligned} \tag{5.38}$$

จากคำตอบแม่นตรงโดยวิธีวิเคราะห์ที่ตำแหน่ง x = 0 และ x = L/2 จะได้ค่า Q1 และ Q2 เท่ากับคำตอบโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นั่นคือสำหรับปัญหานี้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์หาค่าคำตอบได้ถูกต้องเที่ยงตรงที่จุดต่อต่าง ๆ

<u>การใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาความร้อน</u> (Baker, 1991)

1. <u>ปัญหาความร้อนในหนึ่งมิติ</u>

ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีการพัฒนาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้ใช้กับปัญหาความร้อนทั่วไปในหนึ่งมิติโดยเริ่มจากการพัฒนาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในเอลิเมนต์ทั่วไป Ω_e ซึ่งมีรายละเอียดดังแสดงในรูป 5.4



รูปที่ 5.3 รายละเอียดของเอลิเมนต์และฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์เชิงเส้น

โดย

XL และ XR แทนพิกัด x ของจุดต่อทางซ้ายและทางขวา มีความยาวเป็น l_e

QR และ QL เป็นค่าคำตอบโดยประมาณของจุดต่อ XR และ XL ตามลำดับ

การพัฒนาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทั่วไปมักนิยมใช้ระบบพิกัดย่อยเพื่อความสะดวกในการอ้างอิงพิกัดภายในเอลิเมนต์

ให้ $\bar{x}$ อยู่ในระบบพิกัดย่อย มีจุดเริ่มต้นที่ XL และมีความยาวเท่ากับ l_e ดังนั้น $\bar{x} = 0$ ที่ XL และ $\bar{x} = l_e$ ที่ XR จะได้ว่าอุณหภูมิในโดเมน Ω_e มีค่าโดยประมาณเท่ากับ

$$T_e(\bar{x}) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{l_e}\right)QL + \left(\frac{\bar{x}}{l_e}\right)QR \qquad (5.39)$$

ดังนั้นเมื่อ $\bar{x} = 0$, $T_e = QL$ และ $\bar{x} = l_e$, $T_e = QL$

กำหนดให้

$$\zeta_1 \equiv \left(1-\frac{\bar{x}}{l_e}\right)$$
$$\zeta_2 \equiv \left(\frac{\bar{x}}{l_e}\right) \tag{5.40}$$

รูป 5.3 b แสดงกราฟของฟังก์ชั่นเชิงเส้น ζ_1 และ ζ_2 ในสมการ 5.40 สังเกตได้ว่า ζ_i นั้นเป็นฟังก์ชั่นที่ถูกปรับค่า (normalized) ให้มีค่าสูงสุดเท่ากับ 1 และมีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0 สำหรับทุก ๆ เอลิ เมนต์ทั่วไป Ω_e จากสมการ 5.39 และ 5.40 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_e(\bar{x}) &= \zeta_1 QL + \zeta_2 QR \\ &= \{\zeta_1, \quad \zeta_2\}\begin{Bmatrix} QL \\ QR \end{Bmatrix}_e \\ &= \{\zeta_1, \quad \zeta_2\}\{Q\}_e \end{aligned} \tag{5.41}$$

$\{Q\}_e$ คือเมตริกซ์แถวตั้ง (column matrix) ซึ่งเป็นค่าคำตอบของจุดต่อ มักนิยมใช้สัญลักษณ์ $\{N_k\}$ แทน<u>ฟังก์ชั่นพื้นฐาน (basis function)</u> หรือ<u>ฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์</u>อันดับ k

$$\{N_{k=1}\} \equiv \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} \tag{5.42}$$

ดังนั้นการประมาณค่าอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ด้วยฟังก์ชั่นพื้นฐานเชิงเส้นเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} T_e(x) &= \{\zeta_1, \quad \zeta_2\}\{Q\}_e \\ &= \{N_1(\zeta_i)\}^T\{Q\}_e \end{aligned} \tag{5.43}$$

สัญลักษณ์ $\{.\}^T$ แทนเมตริกซ์แถวนอน (row matrix) ซึ่งเป็นทรานส์โพส (transpose) ของเมตริกซ์แถวตั้ง $\{.\}$

สมการลดอันดับกาเลอร์คินจะมีพจน์อินทีกรัลของ $\{N_1(\zeta_i)\}$ และอนุพันธ์ของมันบน Ω_e อนุพันธ์ของ $\{N_1(\zeta_i)\}$ สามารถหาได้โดยกฎลูกโซ่

$$\frac{d}{dx}\{N_1(\zeta_i)\} = \frac{d}{d\zeta_i}\{N_1(\zeta_i)\}\frac{d\zeta_i}{d\bar{x}}\frac{d\bar{x}}{dx} \qquad 1 \le i \le 2$$

$$= \begin{cases} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} l_e^{-1}(1) & for\ i=1 \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} l_e^{-1}(1) & for\ i=2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{l_e}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.44}$$

$T^N(x)$ จะถูกแทนด้วยการประมาณอุณหภูมิ T^h ซึ่งอยู่ในรูปผลรวมของอุณหภูมิในแต่ละเอลิเมนต์ $T_e(x)$

$$T^h = \bigcup_e T_e(x) = \sum_e T_e(x) \text{ โดยไม่เกิดการซ้อนกันของขอบเขต} \tag{5.45}$$

T_e ไม่สามารถรวมกันแบบธรรมดาเพราะจะทำให้เกิดการซ้ำซ้อนกันที่ค่าขอบเขต การรวมโดยไม่ให้เกิดการซ้อนทับ (overlap) เรียกว่า ยูเนียน (union) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bigcup$

จากสมการลดอันดับกาเลอร์คินในรูป

$$S = \sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} k \frac{d\phi_j}{dx}\right) - \int_0^L s\phi_i dx - q\phi_i\Big|_0^L = 0\,, \quad 1 \le i \le N$$

หลังจากแทน$\phi_i(x)$ ด้วย $\{N_k(\zeta_i)\}$ แล้วจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์คือ

$$S^h = \sum_{e=1}^{M}\Bigg[\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_e} \frac{dN_i}{dx} k \frac{dN_j}{dx} dx\, Q_j^e - \int_{\Omega_e} N_i s\, dx - k\frac{dT}{dx}N_i\delta_{eM} + k\frac{dT}{dx}N_i\delta_{e1}\Bigg]\,, \quad 1 \le i \le 2 \tag{5.46}$$

การรวมอินทีแกรนของแต่ละเอลิเมนต์ Ω_e ในสมการ 5.46 จะใช้วิธีพิเศษคือ รวมกันตามแถวในเมตริกซ์ระบบรวม เรียกว่า<u>การประกอบ</u> (assembly) ซึ่งมีแนวความคิดเดียวกับยูเนียนคือเป็นการโดยไม่เกิดการซ้อนกันของขอบเขต จะใช้สัญลักษณ์ S_e เพื่อให้แตกต่างจากการรวมแบบสเกลลาร์ สมการ 5.46 เขียนใหม่ได้เป็น

$$S^h = S_e\left(\int_{\Omega_e}\frac{d\{N_k\}}{dx} k \frac{d\{N_k\}^T}{dx} dx\,\{Q\}_e - \int_{\Omega_e}\{N_k\}s_e\, dx - k\frac{dT}{dx}\begin{Bmatrix}-\delta_{e1}\\ \delta_{eM}\end{Bmatrix}\right) \equiv \{0\} \tag{5.47}$$

พจน์แรกเป็นเมตริกซ์ที่เกี่ยวกับการนำความร้อนในเอลิเมนต์ (element conductivity matrix) แทนด้วยสัญลักษณ์ $[K]_e$ พจน์ที่เกี่ยวกับแหล่งกำเนิดความร้อนและการพาความร้อนที่ขอบเขตเป็นพจน์ที่ผู้ใช้ต้องป้อนข้อมูล จะเรียกผลรวมของพจน์กลุ่มนี้ว่าโหลดเวกเตอร์ (element column (load) matrix) และใช้สัญลักษณ์ $\{b\}_e$ สมการเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้คือ

$$S_e\left([K]_e\{Q\}_e - \{b\}_e\right) = \{0 \tag{5.48}$$

เมตริกซ์การนำความร้อนคือ

$$[K]_e \equiv \int_{\Omega_e} \frac{d\{N_1\}}{dx} k \frac{d\{N_1\}^T}{dx} dx \tag{5.49}$$

สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}[K]_e &= k \int_0^{l_e} \frac{1}{l_e}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{l_e}\{-1 \quad 1\}dx \\ &= \frac{k}{l_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.50}$$

พจน์การกระจาย (distribution) แหล่งความร้อนคือ

$$\{b\}_e \equiv \int_{\Omega_e} \{N_1\} s_e dx \tag{5.51}$$

สมมติให้ s_e มีค่าคงที่จึงดึงออกนอกอินทีกรัลได้ และ $d\bar{x} = dx$ จะได้

$$\begin{aligned}\{b\}_e &= s\int_{\Omega_e}\begin{Bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{Bmatrix}dx = s\int_0^{l_e}\begin{Bmatrix}1-\bar{x}/l_e\\ \bar{x}/l_e\end{Bmatrix} \\ &= sl_e\begin{Bmatrix}1/2\\1/2\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{5.52}$$

สมการของ $[K]_e$ และ $\{b\}_e$ ประกอบกันเป็นชุดเมตริกซ์สำคัญของเอลิเมนต์ (element master matrix library) สำหรับการใช้ฟังก์ชั่นพื้นฐานเชิงเส้น (linear basis) พจน์กระแสความร้อน (heat flux) เป็นเพียงการคำนวณสภาวะที่ขอบเขตโดยไม่ต้องอินทีเกรตสำหรับกรณีปัญหา 1 มิติ ดังนั้นอัลกอริทึมสำหรับการแบ่งรูปร่างลักษณะ Ω^h ใด ๆ เมื่อโดเมนอยู่ในช่วง $0 \le x \le L$ คือ

$$\begin{aligned}S_e\left([K]_e\{Q\}_e - \{b\}_e\right) &= \{0\} \\ &= S_e\left(\frac{k}{l_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\{Q\}_e - \frac{sl_e}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} - k\frac{dT}{dx}\begin{Bmatrix}-\delta_{e1}\\ \delta_{eM}\end{Bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{5.53}$$

<u>การนำความร้อนโดยมีการพาความร้อนที่ขอบเขต</u>

ในกรณีนี้จะสร้างอัลกอริทึมสำหรับปัญหาที่มีการพาความร้อนที่ขอบเขต รวมทั้งปรับปรุงให้สามารถใช้ k และ s ที่มีค่าแปรตามระยะทางได้ด้วย ปัญหาที่กล่าวมานี้มีสมการคือ

$$L(T) = -\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dT}{dx}\right] + s(x) = 0\,, \quad \Omega = (0 < x < L) \tag{5.54}$$

$$l(T) = k\frac{dT}{dn} + h(T - T_r) = 0\,, \qquad \partial\,\Omega_1 \tag{5.55}$$

$$T(x_b) = T_b\,, \qquad \partial\,\Omega_2 \tag{5.56}$$

k(x) และ s(x) มีค่าแปรตามระยะทาง h เป็นค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนสำหรับการแลกเปลี่ยนพลังงานกับตัวกลางที่อุณหภูมิอ้างอิง T_r dT/dnเป็นอนุพันธ์ในทิศทางตั้งฉาก ตัวอย่างเช่น $\pm dT/dx$ บน$\partial\,\Omega$ Ω เป็นโดเมนของปัญหา มีขอบเขตเป็น$\partial\,\Omega$ ซึ่งเกิดจากผลรวมโดยไม่มีการซ้อนกันของ$\partial\,\Omega_1$ และ$\partial\,\Omega_2$ ซึ่งก็คือยูเนียน $\bigcup$

สมการกาเลอร์คินของปัญหาจะเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\Omega}\phi_i L(T^N)dx \quad for\ 1 \le i \le N \\
&= \int_{\Omega}\phi_i\left[-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT^N}{dx}\right)-s(x)\right]dx \\
&= \int_{\Omega}\left[\frac{d\phi_i}{dx}k(x)\frac{dT^N}{dx}-\phi_i s(x)\right]dx-\int_{\partial\Omega}\phi_i\left(k\frac{dT}{dn}\right)d\sigma \\
&= \int_{\Omega}\left[\frac{d\phi_i}{dx}k(x)\frac{dT^N}{dx}-\phi_i s(x)\right]dx+\int_{\partial\Omega_1}\phi_i h\left(T^N-T_r\right)d\sigma \\
&\quad -\int_{\partial\Omega_2}\phi_i k\frac{dT}{dn}d\sigma = 0
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

และได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เป็น

$$
\begin{aligned}
S^h &= S_e\left[\int_{\Omega_e}\frac{d\{N_k\}}{dx}k_e(x)\frac{d\{N_k\}^T}{dx}dx\{Q\}_e-\int_{\Omega_e}\{N_k\}s_e(x)\,dx\right. \\
&\quad +\int_{\partial\Omega_1}\{N_k\}h\left(\{N_k\}^T\{Q\}_e-T_r\right)d\sigma-\int_{\partial\Omega_2}\{N_k\}k\frac{dT^h}{dn}d\sigma \\
&= \{0\}
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

เนื่องจาก $k_e(x)$ และ $s_e(x)$ เป็นมีค่าแปรตามระยะทางจึงไม่สามารถดึงออกนอกอินทิกรัลได้ จากความรู้ที่ว่าฟังก์ชั่นพื้นฐานสามารถใช้ในการประมาณค่าข้อมูลใด ๆ ดังนั้น

$$
k_e(x)=\{N_k(\zeta_i)\}^T\{K\}_e \tag{5.59}
$$

$$
s_e(x)=\{N_k(\zeta_i)\}^T\{S\}_e \tag{5.60}
$$

เวกเตอร์(เมตริกซ์แถวตั้ง) $\{K\}_e$ จะประกอบด้วยค่าการนำความร้อนที่จุดต่อในเอลิเมนต์ $\{S\}_e$ จะเป็นค่าของแหล่งความร้อนที่จุดต่อใน Ω_e จาก 5.59 - 5.60 สามารถคำนวณ $[K]_e$ ต่อไปได้

$$
\begin{aligned}
[K]_e &= \int_{\Omega_e}\frac{d\{N_1\}}{dx}k_e(x)\frac{d\{N_1\}^T}{dx}dx \\
&= \frac{1}{l_e^2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\int_{\Omega_e}k_e(x)dx
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_e}k_e(x)dx &= \int_{\Omega_e}\{N_1\}^T dx\{K\}_e=\int_{\Omega_e}\{\zeta_1 \quad \zeta_2\}dx\{K\}_e \\
&= l_e\left\{\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}\right\}\{K\}_e = l_e\left(\frac{KL}{2}+\frac{KR}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

KL และ KR เป็นค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่จุดต่อทางซ้ายและทางขวาบน Ω_e จากสมการ 5.62 จะเห็นได้ว่าการประมาณ $k_e(x)$ ด้วยฟังก์ชั่นพื้นฐานเชิงเส้นได้ผลเท่ากับค่าเฉลี่ยของ KL และ KR นั่นเอง สุดท้ายได้เมตริกซ์การนำความร้อนเป็น

$$[K]_e = \frac{1}{l_e}\left\{\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right\}\{K\}_e\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

พจน์แหล่งกำเนิดความร้อนก็ใช้วิธีทำนองเดียวกัน

$$\{b\}_e = \int_{\Omega_e} \{N_1\} s_e(x)dx = \int_{\Omega_e} \{N_1\}\{N_1\}^T dx\{S\}_e$$

$$= \frac{l_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\{S\}_e \tag{5.65}$$

ในปัญหา 1 มิติ พจน์การพาความร้อนที่ขอบเขตจะปรากฏที่ปลายทั้งข้างใดข้างหนึ่งของเอลิเมนต์ คือที่ x=0 หรือ x=L

สมมติให้การพาความร้อนนี้เกิดที่เอลิเมนต์ $\Omega_{e=1}$ ดังนั้นการพาความร้อนจะเกิดที่ XL

$$\int_{\partial\Omega_{e=1}} \{N_1\} h\left(\{N_1\}^T \{Q\}_e - T_r\right) d\sigma = \int_{\partial\Omega_{e=1}} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{Bmatrix} h\left(\{\zeta_1, \quad \zeta_2\}\{Q\}_e - T_r\right) d\sigma$$

$$= \int_{\partial\Omega_{e=1}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} h\left(\{1, \quad 0\}\{Q\}_e - T_r\right) d\sigma$$

$$= h\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\{Q\}_e - T_r\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\right)_{e=1} \tag{5.66}$$

เนื่องจาก $\zeta_2 = 0$ และ $\zeta_1 = 1$ ที่ XL ทำให้อินทีกรัลลดรูปเป็นเพียงการคำนวณที่จุดปลาย ถ้าแทนค่า 1 ด้วย $_{e1}$ แล้วสมมติให้การพาความร้อนเกิดขึ้นที่ XR บ้าง จากนั้นดำเนินการเช่นเดียวกัน เมตริกซ์การนำความร้อนต้นแบบ (thermal convection master matrix) ของเอลิเมนต์จะเป็น

$$[H]_e = h_e\begin{bmatrix} \delta_{e1} & 0 \\ 0 & \delta_{eM} \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

$$\{b\}_e = h_e T_r\begin{Bmatrix} \delta_{e1} \\ \delta_{eM} \end{Bmatrix} \tag{5.68}$$

δ_{e1} จะมีค่าเป็น 1 เมื่อคำนวณในเอลิเมนต์ $\Omega_{e=1}$ ในเอลิเมนต์อื่น ๆ จะเท่ากับศูนย์ δ_{eM} ก็เช่นเดียวกันมีค่าเป็น 1 ในเอลิเมนต์ $\Omega_{e=M}$ และมีค่าเป็นศูนย์ในเอลิเมนต์อื่น ๆ

อัลกอริทึมสำหรับปัญหาการถ่ายโอนความร้อนทั่วไปเมื่อใช้ฟังก์ชั่นการประมาณภายในเชิงเส้นคือ

$$S_e\left(\left([K]_e+[H]_e\right)\{Q\}_e-\left\{p\left(s,\quad h,\quad T_r\right)\right\}_e\right)=\{0 \tag{5.69}$$

ความถูกต้องของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของการแบ่งโดเมน (discretization) หรือการแบ่งเมชของปัญหา การแบ่งเมชที่ไม่ดีจะทำให้ผลลัพธ์มีความผิดพลาดมาก ควรมีการปรับย้ายหรือเพิ่มจำนวนเมชในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ในระยะหลังมานี้หัวข้อทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการใช้เมชแบบปรับเปลี่ยน (adaptive mesh refinement) ได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก

2. <u>ไฟไนต์เอลิเมนต์ในสองมิติ</u>

การสร้างสมการเมตริกซ์ใน 1 มิติที่กล่าวมาแล้วนั้นครอบคลุมพื้นฐานหลักการของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีการใน 2 และ 3 มิติจะมีเพียงรายละเอียดบางอย่างเท่านั้นที่ต่างออกไป

โดยทั่วไปการหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการดิฟเฟอเรนเชียลจะได้สมการเมตริกซ์ระบบรวมดังนี้เสมอสำหรับปัญหาภาวะคงที่

$$[K+H]\{Q\}=\{b\} \tag{5.70}$$

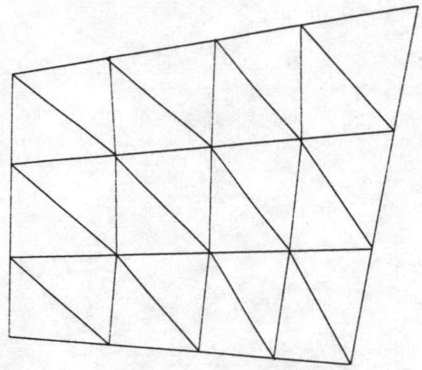
หรือเทียบได้กับ

$$S_e\left([K+H]_e\{Q\}_e-\{b\}_e\right)=\{0\} \tag{5.71}$$

<u>เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม (triangular finite element mesh)</u>

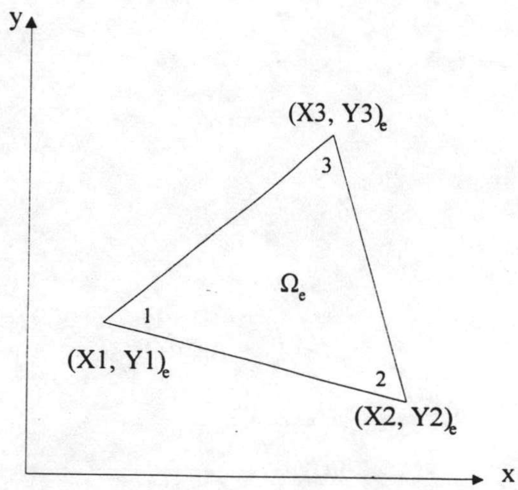
เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมเป็นแบบที่ง่ายที่สุด สามารถใช้ในการจำลองปัญหาทั่วไป เช่น ปัญหาโครงสร้าง ปัญหาความร้อน ปัญหาการไหล ฯลฯ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แต่เดิมจะใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมในการวิเคราะห์การเคลื่อนตัว (displacement field) ของโครงสร้างอากาศยาน แต่เนื่องเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเป็นเอลิเมนต์อย่างง่ายจึงต้องใช้เอลิเมนต์เป็นจำนวนมากเพื่อให้ได้ผลเฉลยโดยประมาณที่เที่ยงตรง

ขั้นแรกของการแบ่งรูปร่างลักษณะมักจะแบ่งโดเมน Ω ออกเป็นพื้นที่ซึ่งค่อนข้างใหญ่จำนวนหนึ่ง เรียกพื้นที่นั้นว่า<u>มาโครโดเมน</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ Ω^H มาโครโดเมนแต่ละอันจะถูกแบ่งต่อไปเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมหรืออาจเรียกว่าเมชสามเหลี่ยม พื้นที่สี่เหลี่ยมสามารถแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมโดยการลากเส้นเชื่อมในแนวทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมแต่ละรูป เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ดีควรจะมีความยาวด้านต่าง ๆ ใกล้เคียงกัน ควรหลีกเหลี่ยงเอลิเมนต์ที่มีลักษณะยาวและแคบ รูปที่ 5.5 แสดงมาโครโดเมนทั่วไปที่เป็นพื้นที่สี่ด้าน (quadrilateral region) ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม Ω_e



รูปที่ 5.4 พื้นที่สี่ด้าน (quadrilateral region) ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

พื้นที่สี่ด้าน (quadrilateral region) สามารถแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 2(I-1)(J-1) เอลิเมนต์ โดย I และ J เป็นจำนวนของจุดต่อบนด้านประชิด พื้นที่มาโครรูปสามเหลี่ยม Ω^h สามารถแบ่งได้ $(I-1)^2$ เอลิเมนต์ เมื่อ I เป็นจำนวนจุดต่อบนด้าน ๆ หนึ่ง เราจะกำหนดหมายเลขให้จุดต่อของเอลิเมนต์เป็น 1, 2 และ 3 โดยมีการเรียงลำดับทวนเข็มนาฬิกา สามเหลี่ยมด้านตรง (straight-sided triangular) จะมีจุดยอด 3 จุด รูป 5.5 จะแสดงการจัดวางจุดต่อ



รูปที่ 5.5 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั่วไป

เช่นเดียวกับกรณี 1 มิติ การสร้างเมชให้มีจำนวนเพียงพอเป็นสิ่งสำคัญเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามารถสร้างด้วยมือได้ง่ายในกรณีที่รูปร่างลักษณะของปัญหาไม่ซับซ้อน แต่ในกรณีที่โดเมนมีรูปร่างซับซ้อนอาจจะต้องทดลองสร้างเมชหลายครั้งเพื่อที่จะให้ได้

เมชที่เหมาะสมเพื่อให้ได้คำตอบซึ่งมีความผิดพลาดอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ การสร้างเมชที่หนาแน่นด้วยมือเป็นเรื่องน่าเบื่อหน่ายเนื่องจากจะต้องกำหนดพิกัด (X_i, Y_i) ของจุดยอดทั้งสามให้ถูกต้องทุกเอลิ เมนต์

การแบ่งเอลิเมนต์ด้วยคอมพิวเตอร์เป็นสิ่งทีมีความจำเป็นสำหรับปัญหา 2 มิติและ 3 มิติ โปรแกรมจะสร้างพิกัด {X, Y} สำหรับจุดต่อของเอลิเมนต์ทั้งหมดให้โดยอัตโนมัติหลังจากผู้ใช้ได้ป้อนข้อมูลรูปร่างลักษณะและขอบเขตของปัญหา

<u>ฟังก์ชั่นการประมาณภายใน</u>

ฟังก์ชั่นทดลอง 2 มิติมีรูปแบบเป็น $\phi_i(x_j)$, $1 \le i \le N$ และ $1 \le j \le n = 2$ สมการ 5.11 สามารถขยายให้ใช้งานใน 2 มิติได้คือ

$$T^N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x,y) \tag{5.72}$$

ซึ่งคล้ายกับในกรณี 1 มิติ วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะแปลงชุดของฟังก์ชั่นทดลองϕ_i เป็นฟังก์ชั่นพื้นฐาน $\{N_k(\zeta_i)$ สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม Ω_e

<u>ฟังก์ชั่นการประมาณเชิงเส้น</u>

ฟังก์ชั่นพื้นฐานอันดับหนึ่ง $\{N_1\}$ ประกอบด้วยโพลิโนเมียลเชิงเส้นในรูปของ ζ_i โดย ζ_i เป็นระบบพิกัดย่อยในเอลิเมนต์สามเหลี่ยม Ω_e โพลิโนเมียลเชิงเส้นในระบบแกนรวมคือ

$$T_e(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \tag{5.73}$$

เอลิเมนต์ Ω_e มีจุดยอด 3 จุด ใช้สัญลักษณ์ $Q_e = \{Q1, \quad Q2, \quad Q3\}_e^T$ แทนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านั้น สมการ 5.73 ในระบบพิกัดธรรมชาติ (local natural coordinate) คือ

$$\begin{aligned} T_e(\zeta_i) &= \zeta_1 Q1_e + \zeta_2 Q2_e + \zeta_3 Q3_e \\ &= \{\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3\} \begin{Bmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \end{Bmatrix}_e \\ &= \{N_1(\zeta_i)\}^T \{Q\}e \end{aligned} \tag{5.74}$$

รูปแบบของสมการ 5.74 นี้พิสูจน์ว่าฟังกชั่นพื้นฐานเชิงเส้นสองมิติเป็นส่วนขยายของฟังกชั่นพื้นฐานเชิงเส้นหนึ่งมิติ(ทบทวนสมการ 5.43)โดยครง

เมื่อให้ n เป็นจำนวนมิติ ฟังก์ชั่นพื้นฐานหรือฟังก์ชั่นประมาณภายในเอลิเมนต์ใน 1 มิติและ 2 มิติ คือ

$$n=1:\quad \{N_1(\zeta_i)\}=\begin{Bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{Bmatrix}=\{\zeta_i\}\qquad 1\le i\le 2=n+1 \tag{5.43}$$

$$n=2:\quad \{N_1(\zeta_i)\}=\begin{Bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta 3\end{Bmatrix}=\{\zeta_i\}\qquad 1\le i\le 3=n+1 \tag{5.75}$$

ในกรณีฟังก์ชั่นพื้นฐานสามมิติ (n = 3) ซึ่งเอลิเมนต์เป็นรูปทรงสี่หน้า (tetrahedral element) ฟังก์ชั่นพื้นฐานก็จะมีรูปแบบทำนองเดียวกันคือ $\{N_1\}=\{\zeta_i\}$, $1\le i\le 4=n+$

ขั้นตอนพื้นฐานต้องหาว่าระบบพิกัดธรรมชาติ ζ_i ในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมีรูปฟังก์ชั่นเป็นอย่างไร โดยการแทนค่าที่จุดต่อต่าง ๆ และดึงตัวร่วม $\{Q\}_e$ ออก

$$\begin{aligned}T_e(x=X_1,y=Y_1)&\equiv Q1=a_1+a_2X_1+a_3Y_1\\ T_e(x=X_2,y=Y_2)&\equiv Q2=a_1+a_2X_2+a_3Y_2\\ T_e(x=X_3,y=Y_3)&\equiv Q3=a_1+a_2X_3+a_3Y_3\end{aligned} \tag{5.76 a}$$

ซึ่งจะได้เป็นสมการเมตริกซ์ขนาด 3 x 3

$$\begin{bmatrix}1 & X1 & Y1\\ 1 & X2 & Y2\\ 1 & X3 & Y3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q1\\ Q2\\ Q3\end{Bmatrix} \tag{5.76 b}$$

แก้สมการหาค่า a_1 , a_2 และ a_3 ได้เป็น

$$\begin{aligned}a_1&=\frac{(X_2Y_3-X_3Y_2)Q1+(X_3Y_1-X_1Y_3)Q2+(X_1Y_2-X_2Y_1)Q3}{2A_e}\\ a_2&=\frac{(Y_2-Y_3)Q1+(Y_3-Y_1)Q2+(Y_1-Y_2)Q3}{2A_e}\\ a_3&=\frac{(X_3-X_2)Q1+(X_1-X_3)Q2+(X_2-X_1)Q3}{2A_e}\end{aligned} \tag{5.77}$$

ตัวหาร $2A_e$ ในสมการ 5.77 คือ 2 เท่าของพื้นที่สามเหลี่ยม ซึ่งคำนวณได้จากดีเทอมิแนนท์ของเมตริกซ์จตุรัส [.] ในสมการ 5.76 b

$$\det[\,.\,] = 2A_e = (X_1Y_2 - X_2Y_1) - (X_3Y_1 - X_1Y_3) + (X_2Y_3 - X_3Y_2) \tag{5.78}$$

แทนค่า a_1, a_2 และ a_3 ในสมการ 5.76 a แล้วดึงตัวร่วม $\{Q\}_e$ ออกแล้วเทียบกับสมการ (5.74) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{(X_2Y_3 - X_3Y_2)_e + (Y_2 - Y_3)_e x + (X_3 - X_2)_e y}{2A_e} \\
\zeta_2 &= \frac{(X_3Y_1 - X_1Y_3)_e + (Y_3 - Y_1)_e x + (X_1 - X_3)_e y}{2A_e} \\
\zeta_3 &= \frac{(X_1Y_2 - X_2Y_1)_e + (Y_1 - Y_2)_e x + (X_2 - X_1)_e y}{2A_e}
\end{aligned} \tag{5.79}$$

ดังนั้นพิกัดธรรมชาติ ζ_i บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นของพิกัด $(X_i, Y_i)_e$, $1 \leq i \leq 3$ ของเอลิเมนต์, พื้นที่ของเอลิเมนต์ A_e และพิกัดในระบบรวมใหญ่ (x, y)

<u>การนำความร้อนในสภาวะคงที่</u>

สมการการถ่ายเทความร้อนใน 2 มิติคือ

$$\begin{aligned}
L(T) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) - s \\
&\equiv -\nabla \cdot k\nabla T - s = 0 \qquad \text{on } \Omega \subset R^2
\end{aligned} \tag{5.80}$$

$$l(t) = -k\nabla T \cdot \mathbf{n} - q_n = 0 \qquad \text{on } \partial\ \Omega_1 \tag{5.81}$$

$$T(x_b) = T_b \qquad \text{on } \partial\ \Omega_2 \tag{5.82}$$

บรรทัดที่ 2 ในสมการ 5.80 มีการใช้ตัวดำเนินการเกรเดียนท์ (gradient operator) ซึ่งกำหนดเป็น $\nabla \equiv \mathbf{i}\partial x/\partial y + \mathbf{j}\partial x/\partial y$ สัญลักษณ์ $\Omega \subset R^2$ อ่านว่าบริเวณ Ω อยู่ในอวกาศ 2 มิติ (Euclidean space) R^2 เมื่อสำหรับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่เป็นบวก, $k = k(x, y) > 0$ สมการ (5.80) จะเป็นสมการอีลิปติก (elliptic equation) สภาวะขอบเขตทั้งหมดรวมกันจะต้องครอบคลุมขอบเขตทั้งหมดของรูปร่างลักษณะของปัญหา นั่นคือยูเนียนของสมการ (5.81) และ (5.82) จะต้องครอบคลุม Ω **n** เป็นเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย (outward-pointing unit normal vector) **i** และ **j** จะมีทิศขนานกับแกน x และแกน y $s = s(x, y)$ เป็นแหล่งความร้อนภายใน q_n เป็นกระแสความร้อนไหลออกคงที่บนขอบเขต $\partial\,\Omega_1$ และ $T_b = T_b(x, y)$ บนขอบเขต $\partial\ \Omega_2$ เป็นอุณหภูมิคงที่ (Dirichlet condition)

ดำเนินการวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการ 5.80

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\Omega} \phi_i(x,y) L(T^N)\, d\tau \equiv 0 \\
&= \int_{\Omega} \phi_i \left(-\nabla \cdot k\nabla T^N - s\right) d\tau \\
&= \int_{\Omega} \left(\nabla\phi_i \cdot k\nabla T^N - \phi_i s\right) d\tau - \int_{\partial\Omega} \phi_i k\nabla T^N \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \left(\nabla\phi_i \cdot k\nabla T^N - \phi_i s\right) d\tau - \int_{\partial\Omega} \phi_i q_n\, d\sigma \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \phi_i k\nabla T^N \cdot \mathbf{n}\, d\sigma
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

แทนที่ $\phi_i(x,y)$ ด้วยฟังก์ชั่นพื้นฐาน $\{N_k(\zeta_i)\}$ ได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังนี้

$$
\begin{aligned}
S^h = S_e\Bigg(& \int_{\Omega_e} \nabla\{N_k\} \cdot k_e \nabla\{N_k\}^T d\tau\ \{Q\}_e \\
& - \int_{\Omega_e} \{N_k\} s_e\, d\tau + \int_{\partial\Omega_1} \{N_k\} q_{n_e}\, d\sigma - \int_{\partial\Omega_2} \{N_k\} \cdot k_e \nabla T_e \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \Bigg) = \{0\}
\end{aligned}
\tag{5.84}
$$

อินทิกรัลพจน์แรกเป็นเมตริกซ์การนำความร้อนของเอลิเมนต์ $[K]_e$ รวมพจน์ที่เหลือทั้งหมดไว้ในเมตริกซ์แถวตั้งของข้อมูล $\{b\}_e$ ดังนั้นสมการ 5.84 เขียนได้ในรูป

$$
S_e([K]_e \{Q\}_e - \{b\}_e) = \{0\} \tag{5.85}
$$

ซึ่งมีรูปแบบเหมือนในสมการ 1 มิติทุกประการ

เมื่อเลือกฟังก์ชั่นพื้นฐานเป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้น (k=1) แล้ว เมตริกซ์การนำความร้อนคือ

$$
\begin{aligned}
[K]_e &= \int_{\Omega_e} \nabla\{N_1\} \cdot k_e \{N_1\}^T d\tau \\
&= \nabla\{N_1\} \cdot \{N_1\}^T \int_{\Omega_e} k_e\, d\tau
\end{aligned}
\tag{5.86}
$$

เนื่องจาก $\{N_1\}$ เป็นโพลิโนเมียลเชิงเส้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\{N_1\}$ จึงเป็นค่าคงที่และดึงออกนอกอินทิกรัลได้

ใช้กฎลูกโซ่เพื่อหาค่าอนุพันธ์

$$
\begin{aligned}
\nabla\{N_1\} &\equiv \mathbf{i}\frac{\partial\{N_1\}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\{N_1\}}{\partial y} \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{dx} + \mathbf{j}\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{dy}, \qquad 1 \le i \le 3
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

จากสมการ (5.75) พจน์ $\dfrac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}$ ในสมการ (5.87) มีค่าเป็น

$$
\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i} = \begin{cases} \{1,\ 0,\ 0\}^T, & i = 1 \\ \{0,\ 1,\ 0\}^T, & i = 2 \\ \{0,\ 0,\ 1\}^T, & i = 3 \end{cases} \tag{5.88}
$$

พจน์ $\partial\zeta_i/\partial x$ และ $\partial\zeta_i/\partial y$ นั้นบ่งอย่างชัดเจนว่า ζ_i นั้นขึ้นต่อ x และ y นั่นคือ $\zeta_i = \zeta_i(x,y) = \zeta_i(x_j), 1 \le j \le n = 2$

ยาโคเบียนของการแปลงเอลิเมนต์ (Jacobian of element transformation) $\zeta_i = \zeta_i(x_j)$ ถูกกำหนดให้เท่ากับเมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น $\partial\zeta_i/\partial x_j$

$$[J]_e = \left[\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_j}\right]_e, \quad 1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}+1, \quad 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{n} \tag{5.89}$$

จากสมการ (5.79)

$$\left[\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_j}\right]_e = \frac{1}{2A_e}\begin{bmatrix} Y_2 - Y_3 & X_3 - X_2 \\ Y_3 - Y_1 & X_1 - X_3 \\ Y_1 - Y_3 & X_2 - X_1 \end{bmatrix}_e \tag{5.90}$$

ดังนั้นการแปลงยาโคเบียนจึงเป็นเพียงผลต่างระหว่างพิกัดของจุดต่อ $(X_i, Y_i)_e$ ใน Ω_e หารด้วยสองเท่าของพื้นที่เอลิเมนต์

จากสมการ (5.88) และ (5.90) เราคำนวณหาค่า $\nabla\{N_1\}\cdot\{N_1\}^T$ ได้ และจากสมการ 5.87 โปรดักส์ของสองพจนนี้คือ

$$\begin{aligned}
&\nabla\{N_1\}\cdot\{N_1\}^T \\
&= \left(\mathbf{i}\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{\partial y}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial\{N_1\}^T}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\{N_1\}^T}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{\partial y}\right) \\
&= \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\left(\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{\partial x}\frac{\partial\{N_1\}^T}{\partial\zeta_k}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\left(\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\zeta_i}{\partial y}\frac{\partial\{N_1\}^T}{\partial\zeta_k}\frac{\partial\zeta_k}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\{N_1\}^T}{\partial\zeta_k}\right)\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}\right)_e, \quad \begin{cases} 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{n} = 2 \\ 1 \le (\mathrm{i}, \mathrm{k}) \le n+1 = 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.91}$$

ดัชนี k ได้ถูกนำมาใช้เพื่อให้สามารถคูณเมตริกซ์ที่มีดัชนีเหมือนกัน ตัวแปร j ถูกนำมาใช้เพื่อให้สามารถเขียนสกาลาร์สองพจน์ให้เป็นพจน์เดียว

พจน์ในวงเล็บแรกของบรรทัดสุดท้ายในสมการ 5.91 เป็นเมตริกซ์ 3 x 3 ซึ่งมีสมาชิกเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (5.88) ตัวอย่างเช่น เมื่อ i = 1 และ k = 3

$$\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_1}\frac{\partial\{N_1\}^T}{\partial\zeta_3} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\{0, \quad 0, \quad 1\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.92}$$

เมื่อทดลองกับดัชนีคู่อื่น ๆ แล้วจะพบว่าพจน์นี้สามารถเขียนอย่างสั้น ๆ ได้ว่า

$$\frac{\partial\{N_1\}}{\partial\zeta_i}\frac{\partial\{N_1\}^T}{\partial\zeta_k} = [\delta_{ik}], \quad 1 \le (i,\ k) \le 3 \tag{5.93}$$

δ_{ik} คือ ครอนเนกเกอร์เดลต้าเทียม (pseudo-Kronecker delta) ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{for position (i, k) in matrix} \\ 0 & \text{for all other matrix location} \end{cases} \tag{5.94}$$

ด้วยข้อกำหนดนี้ สมการ (5.91) เขียนได้เป็น

$$\nabla\{N_1\}\cdot\nabla\{N_1\}^T = [\delta_{ik}]\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}\right)_e, \qquad \begin{cases} 1 \le j \le 2 \\ 1 \le (i,\ k) \le 3 \end{cases} \tag{5.95}$$

เมื่อแทนสมการ (5.95) ลงสมการ 5.86 เมตริกซ์การนำความร้อนของเอลิเมนต์คือ

$$\begin{aligned} [K]_e &= [\delta_{ik}]\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}\right)_e \int_{\Omega_e} k_e d\tau \\ &= \frac{1}{(2A_e)^2}\begin{bmatrix} \zeta_{11}^2+\zeta_{12}^2 & \zeta_{11}\zeta_{21}+\zeta_{12}\zeta_{22} & \zeta_{11}\zeta_{31}+\zeta_{12}\zeta_{32} \\ \zeta_{21}\zeta_{11}+\zeta_{22}\zeta_{12} & \zeta_{21}^2+\zeta_{22}^2 & \zeta_{21}\zeta_{31}+\zeta_{22}\zeta_{32} \\ \zeta_{31}\zeta_{11}+\zeta_{32}\zeta_{12} & \zeta_{31}\zeta_{21}+\zeta_{32}\zeta_{22} & \zeta_{31}^2+\zeta_{32}^2 \end{bmatrix}_e \\ &\times \int_{\Omega_e} k_e d\tau \end{aligned} \tag{5.96}$$

ตัวแปร $\zeta_{ij} \equiv \partial\zeta_i / \partial x_j$ ในสมการเมตริกซ์ (5.96) คำนวณได้จากผลต่างระหว่างพิกัดของจุดต่อ k_e ในพจน์สุดท้ายของสมการ (5.96) สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชั่นพื้นฐาน $\{N_1\}$

$$\int_{\Omega_e} k_e d\tau = \int_{\Omega_e}\{N_1\}d\tau = \int_{\Omega_e}\{\zeta_1,\quad \zeta_2,\quad \zeta_3\}d\tau\{K\}_e \tag{5.97}$$

เมตริกซ์แถวตั้ง $\{K\}_e$ เป็นค่าของ $k_e(x,\ y)$ ที่จุดต่อซึ่งเป็นค่าคงที่จึงดึงออกจากอินทีกรัลได้ พจน์ต่าง ๆ ถูกหาค่ามาเกือบหมดแล้ว เหลือแต่การอินทีเกรต ζ_i บน Ω_e สูตรการอินทีเกรตในระบบพิกัดธรรมชาติสำหรับ n = 2 คือ

$$\int \zeta_1^p \zeta_2^q \zeta_3^r d\tau = 2A_e \frac{p!q!r!}{(2+p+q+r)!} \tag{5.98}$$

เมื่อ A_e เป็นพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและ p, q, r เป็นเลขยกกำลัง ดังนั้น

$$\int_{\Omega_e} k_e d\tau = 2A_e\left\{\tfrac{1}{6},\quad \tfrac{1}{6},\quad \tfrac{1}{6}\right\}\{K\}_e = A_e\left\{\tfrac{1}{3},\quad \tfrac{1}{3},\quad \tfrac{1}{3}\right\}\{K\}_e = A_e\bar{k}_e \tag{5.99}$$

ซึ่งยืนยันว่าค่าเฉลี่ยภายในเอลิเมนต์ของ k_e มีผลเท่ากับการประมาณภายในเอลิเมนต์ด้วยฟังก์ชั่นพื้นฐานเชิงเส้น

การคำนวนในสมการ (5.96) ได้ผลที่สมบูรณ์ดังนี้

$$[K]_e = \frac{\bar{k}_e}{4A_e}\begin{bmatrix} \zeta_{11}^2+\zeta_{12}^2 & \zeta_{11}\zeta_{21}+\zeta_{12}\zeta_{22} & \zeta_{11}\zeta_{31}+\zeta_{12}\zeta_{32} \\ \zeta_{21}\zeta_{11}+\zeta_{22}\zeta_{12} & \zeta_{21}^2+\zeta_{22}^2 & \zeta_{21}\zeta_{31}+\zeta_{22}\zeta_{32} \\ \zeta_{31}\zeta_{11}+\zeta_{32}\zeta_{12} & \zeta_{31}\zeta_{21}+\zeta_{32}\zeta_{22} & \zeta_{31}^2+\zeta_{32}^2 \end{bmatrix}_e \tag{5.100}$$

สมการ (5.100) คือเมตริกซ์การนำความร้อนของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งมีรายละเอียดมากว่ากรณี 1 มิติ

พจน์ที่เหลือคือพจน์แหล่งกำเนิดความร้อนและกระแสความร้อนที่ขอบเขตใน WS_h การคำนวณจะใช้ฟังก์ชั่นพื้นฐานเชิงเส้นประมาณค่าภายในระหว่างจุดต่อ พจน์ของแหล่งกำเนิดความร้อนจะเป็นดังนี้

$$\int_{\Omega_e}\{N_1\}s_e d\tau = \int_{\Omega_e}\{N_1\}\{N_1\}^T d\tau\{S\}_e$$

$$= \frac{A_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\{S\}_e \tag{5.101}$$

<u>การนำความร้อนร่วมกับการพาความร้อนที่ขอบเขตในสภาวะคงที่</u>

ต่อไปจะปรับปรุงสมการให้ใช้งานได้กว้างขวางขึ้น สามารถใช้ได้เมื่อคุณสมบัติต่าง ๆ เป็นตัวแปรและมีการการพาความร้อนที่ขอบเขต สมการที่ปรับปรุงจาก (5.80) ถึง (5.82) ใหม่ใช้งานได้เพิ่มขึ้นคือ

$$L(T) = -\nabla\cdot k(x_i)\nabla T - s(x_i) = 0 \qquad \text{on } \Omega\subset \mathrm{R}^2 \tag{5.102}$$

$$l(T) = k\nabla T\cdot\mathbf{n} + h(T-T_r) = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega_1 \tag{5.103}$$

$$l(T) = k\nabla T\cdot\mathbf{n} + q_n = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega_2 \tag{5.104}$$

$$T(x_b) = T_b \qquad \text{on } \partial\Omega_3 \tag{5.105}$$

ยูเนียนของ $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ และ $\partial\Omega_3$ รวมกันจะต้องครอบคลุมขอบเขตของโดเมน