บทที่ 3

การวิเคราะห์แบบไม่เป็นเชิงเส้นตรง (Nonlinear Analysis)

3.1 บทนำ

ในการวิเคราะห์โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กตามสมมติฐานที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 ทำให้เกิดความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงขึ้น 2 ชนิดคือ ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงเชิงวัสดุ(Material Nonlinearity) และความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงเชิงเรขาคณิต (Geometrical Nonlinearity)

ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงเชิงวัสดุมีผลมาจากความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของคอนกรีต และความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของเหล็กเสริม (ดังรูปที่ 2.1 และ 2.2) ผลของคอนกรีตและเหล็กเสริมที่มีต่อหน้าตัดคอนกรีตเหล็ก-เสริมแสดงอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก-โมเมนต์-ความโค้งและเวลา (ดังรูปที่ 2.5)

ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงเชิงเรขาคณิตเกิดขึ้นเมื่อค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างมีค่ามากพอที่จะทำให้รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลี่ยนไป และมีผลต่อสภาพสมดุลย์ของโครงสร้างด้วย ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับ การเปลี่ยนตำแหน่งจึงไม่สามารถแยกออกจากกันได้ชัด เหมือนกับโครงสร้างที่มีการตอบสนองเป็นเชิงเส้นตรง (Linear Structure)(ตามสมการที่ 2.27)

จากผลดังกล่าวทำให้ไม่สามารถหาคำตอบได้โดยตรงเหมือนโครงสร้างที่มีการตอบสนองเป็นเชิงเส้นตรง การวิเคราะห์ผลลัพธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นตรงมีหลายแบบ ในการศึกษานี้ใช้วิธีการแบบเพิ่มทีละขั้น(Incremental Method) ในการพิจารณาพฤติกรรมและกำลังรับน้ำหนักของโครงสร้างทั้งในการรับน้ำหนักบรรทุกระยะเวลาสั้น และระยะเวลานาน โดยวิธีการนี้หากมีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกทีละน้อย ๆ และแต่ละขั้นมีการกระทำซ้ำเป็นจำนวนครั้งที่มากพอ ผลลัพธ์ที่ได้จะลู่เข้าสู่ค่าที่แท้จริง (Exact) (15)

3.2 รูปแบบการวิเคราะห์โครงสร้าง

การวิเคราะห์โดยวิธีกระทำซ้ำแบบเพิ่มทีละขั้นนี้ กระทำโดยที่กำหนดว่า ณ. ขณะใดขณะหนึ่ง โครงสร้างจะตอบสนองเป็นเชิงเส้นตรงกับน้ำหนักบรรทุกส่วนที่เพิ่มขึ้น(Incremental Load) คุณสมบัติของโครงสร้างในขณะใดขณะหนึ่งขึ้นกับสภาพสมดุลย์ชั่วคราวจากการกระทำซ้ำครั้งที่แล้ว(Previous Iteration) ค่าของการเคลื่อนที่ทั้งหมดของโครงสร้างได้จากผลบวกของการเคลื่อนที่เมื่อมีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกแต่ละครั้ง รูปแบบของการวิเคราะห์สามารถเขียนในรูปสัญญลักษณ์ได้ดังนี้คือ

เมื่อเพิ่มน้ำหนักซึ่งมีค่าน้อย ๆ แก่โครงสร้างสมการที่ (2.37) เขียนได้เป็น

$$[\Delta F] = [s][\Delta D] \qquad (3.1)$$

เมื่อ $[s]$ เป็นเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างดังแสดงในสมการ (2.41)หาได้จากเส้นโค้งน้ำหนักบรรทุก-โมเมนต์-ความโค้ง-เวลา ซึ่งแทนสติฟเนสของหน้าตัดใด ๆ ค่าความต้านทานทางการดัด EI แบบเซแคนต์ (Secant Flexural Rigidity) ดังสมการ (2.17) โดยค่า EI เปลี่ยนไปทุกครั้งของการกระทำซ้ำและหาได้จากสภาพสมดุลย์ชั่วคราวของการกระทำซ้ำครั้งที่แล้ว

กำหนดให้ $[F_A]$ และ $[D_A]$ เป็นค่าน้ำหนักบรรทุกและการเปลี่ยนตำแหน่งสมดุลย์เมื่อมีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกครั้งแรก ขั้นต่อไปจะพิจารณาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งซึ่งสมดุลย์ภายใต้น้ำหนักบรรทุก$[F_B]$ ระหว่างการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกครั้งที่สอง ค่าน้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มขึ้น คือ

$$[\Delta F_A] = [F_B] - [F_A] \qquad (3.2)$$

ภายใต้น้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มขึ้น$[\Delta F_A]$ การกระทำซ้ำครั้งแรก คุณสมบัติของโครงสร้างหามาจากสภาพสมดุลย์ของน้ำหนักบรรทุกครั้งก่อน ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เพิ่มขึ้น$[\Delta D_A]$ หาได้จาก

$$[\Delta D_A] = [S_A]^{-1}[\Delta F_A] \qquad (3.3)$$

เมื่อ $[S_A]^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ $[S_A]$ ซึ่งหามาจากน้ำหนักบรรทุกทั้งหมดและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดของการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกครั้งที่แล้ว

ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เพิ่มขึ้น $[\Delta D_A]$ ใช้ในการพิจารณาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในพิกัดระบบ$[\Delta \bar{U}_A]$ และแรงในพิกัดระบบ $(\Delta \bar{P}_A)$ จากสมการ(2.38) และ (2.36)ตามลำดับ

ดังนั้น ค่าน้ำหนักบรรทุกทั้งหมดและค่าการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดของการกระทำซ้ำครั้งแรก คือ

$$
\begin{aligned}
[F'_B] &= [F_A] + [\Delta F_A] \\
[\bar{P}'_B] &= [\bar{P}_A] + [\Delta \bar{P}_A] \\
[D'_B] &= [D_A] + [\Delta D_A] \\
[\bar{U}'_B] &= [\bar{U}_A] + [\Delta \bar{U}_A]
\end{aligned}
\qquad (3.4)
$$

เมื่อ $[\bar{P}_A]$ และ $[\bar{U}_A]$ เป็นเมตริกซ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งในพิกัดระบบตามลำดับ ซึ่งสอดคล้องกับสภาพสมดุลย์ของการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกครั้งแรก

การเพิ่มน้ำหนักบรรทุกครั้งหนึ่ง ๆ จะกระทำซ้ำอย่างน้อยสองครั้ง การกระทำซ้ำครั้งที่สองพิจารณาจาก

$$[\Delta D'_A] = [S'_A]^{-1}[\Delta F_A] \qquad (3.5)$$

เมื่อ $[S'_A]^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ $[S'_A]$ ซึ่งหาจาก $[\Delta F_A]$ และ $[D'_B]$ ซึ่งได้มาจากสภาพสมดุลย์ชั่วคราวของการกระทำซ้ำครั้งแรก

ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง $[\Delta D'_A]$ ที่ได้นี้จะใช้ในการหาค่าการเพิ่มของการเปลี่ยนตำแหน่ง $[\Delta \bar{U}'_A]$ และแรง $[\Delta \bar{P}_A]$ ในพิกัดระบบ ดังนั้นค่าแรงทั้งหมดและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดของการกระทำซ้ำครั้งที่สอง คือ

$$
\begin{aligned}
[F''_B] &= [F_A] + [\Delta F_A] \\
[\bar{P}''_B] &= [\bar{P}_A] + [\Delta \bar{P}'_A] \\
[D''_B] &= [D_A] + [\Delta D'_A] \\
[\bar{U}''_B] &= [\bar{U}_A] + [\Delta \bar{U}'_A]
\end{aligned}
\qquad (3.6)
$$

การตรวจสอบว่าการเปลี่ยนตำแหน่งคอนเวอร์จ (Converge) หรือไม่ ทำโดยการเปรียบเทียบค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง $[\Delta D'_A]$ และ $[\Delta D_A]$ ถ้าความแตกต่างระหว่างค่าการเปลี่ยนตำแหน่งนี้มีค่าน้อยกว่า ค่าผิดพลาดที่ยอมให้ (Allowable Error) ก็จะถือว่าคอนเวอร์จ ถ้าไม่คอนเวอร์จค่าแรงทั้งหมดและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดของการกระทำซ้ำครั้งปัจจุบันจะถูกนำไปหาค่าเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างสำหรับการกระทำซ้ำครั้งต่อไป ก่อนที่จะเปลี่ยนค่ากลับไปสู่ค่าเดิมที่ยังไม่ได้มีการเพิ่ม คือ

$$
\begin{aligned}
[F_A] &= [F''_B] - [\Delta F_A] \\
[\bar{P}_A] &= [\bar{P}''_B] - [\Delta \bar{P}'_A] \\
[D_A] &= [D''_B] - [\Delta D'_A] \\
[\bar{U}_A] &= [\bar{U}''_B] - [\Delta \bar{U}'_A]
\end{aligned}
\qquad (3.7)
$$

ค่า $[\Delta D'_A]$ จะใช้ในการเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบการคอนเวอร์จในการกระทำซ้ำครั้งต่อไป การกระทำซ้ำจะกระทำต่อไปในลักษณะนี้เรื่อย ๆ จนกระทั่งคอนเวอร์จ

น้ำหนักบรรทุกจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ทีละขั้น โดยกระทำตามกระบวนการที่อธิบายมานี้ในการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกแต่ละครั้ง น้ำหนักบรรทุกประลัย (Ultimate Load) เกิดขึ้นเมื่อค่าโมเมนต์ที่หน้าตัดใดหน้าตัดหนึ่ง มีค่ามากกว่าความสามารถในการรับโมเมนต์ (Moment Capacity) ของหน้าตัดนั้น

3.3 ขั้นตอนการวิเคราะห์

การหาพฤติกรรม และกำลังรับน้ำหนักของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้น้ำหนักบรรทุกระยะเวลาสั้น และระยะเวลานาน อาศัยเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ช่วยการวิเคราะห์ สามารถทำเป็นขั้น ๆ ได้ดังนี้คือ

1. อ่านข้อมูลทางโครงสร้าง ลำดับของน้ำหนักบรรทุกและเวลาที่สมนัยกัน

2. อ่านข้อมูลโมเมนต์และความโค้ง ที่สมนัยกับแรงกดทั้งหมดและเวลาของการบรรทุกค้าง

3. พิจารณาค่า ความต้านทางทางการดัด EI จากค่าเฉลี่ยของขนาดของโมเมนต์ที่ปลายทั้งสองข้างของชิ้นส่วนย่อย ที่มีสภาพสมดุลย์ชั่วคราวจากการกระทำซ้ำครั้งที่แล้ว และตรวจสอบว่ามีการวิบัติเกิดขึ้นหรือไม่

4. คำนวณเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง [S]

5. คำนวณค่าน้ำหนักบรรทุกภายนอกที่เพิ่มขึ้น [ΔF] สำหรับลำดับที่มีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุก หรือค่าน้ำหนักบรรทุกค้าง [F] สำหรับลำดับที่มีการเพิ่มเวลา (จะเพิ่มน้ำหนักบรรทุกและเวลาพร้อมกันไม่ได้)

6. หาคำตอบ การเปลี่ยนตำแหน่งจากน้ำหนักบรรทุกในขั้นที่ 5

7. ตรวจสอบการคอนเวอร์จของคำตอบ โดยการเปรียบเทียบค่าการเปลี่ยน

ตำแหน่งในข้อ 6 กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ได้จากการกระทำซ้ำครั้งที่แล้ว

8. หาค่าแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งที่เพิ่มขึ้นของแต่ละชิ้นส่วนย่อยสำหรับลำดับที่มีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุก หรือค่าแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมด สำหรับลำดับที่มีการเพิ่มเวลา

9. คำนวณหาแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดของแต่ละชิ้นส่วนย่อย ซึ่งจะนำไปใช้ในการคำนวณค่าเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างในการกระทำซ้ำครั้งต่อไป

10. ถ้าการตรวจสอบในขั้นที่ 7 คอนเวอร์จให้กลับไปคำนวณขั้นที่ 2 แต่ถ้าไม่คอนเวอร์จให้คำนวณในขั้นที่ 11 และ 12

11. ลดค่าแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดกลับไปสู่ค่าแรงภายใน และการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมดของลำดับการรับน้ำหนักบรรทุกครั้งที่แล้ว สำหรับลำดับที่มีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุก และให้ค่าแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งทั้งหมด มีค่าเป็นศูนย์สำหรับลำดับที่มีการเพิ่มเวลา

12. กลับไปทำขั้นตอนที่ 3

ลำดับการทำงานสรุปไว้ในรูปของผังงาน (Flow Chart) ดังรูปที่ 3.1