



รายงานผลการวิจัย
ทุนวิจัยรัชดาภิเษกสมโภช

เรื่อง

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์ความเค้น
เนื่องจากอุณหภูมิ

โดย

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปราโมทย์ เดชะอำไพ

กุมภาพันธ์ 2541

รายงานผลการวิจัย
ทุนวิจัยรัชดาภิเษกสมโภช



เรื่อง

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์ความเค้น
เนื่องจากอุณหภูมิ

โดย

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

กุมภาพันธ์ 2541

11847035X

19 ก.ค. 2543

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยนี้ได้รับความอนุเคราะห์จากทุนวิจัยรัชดาภิเษกสมโภช จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ผู้วิจัยขอขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ที่นี้ รวมทั้งกรรมการ เจ้าหน้าที่ผู้ดูแลทุนวิจัยนี้ ซึ่งให้ความช่วยเหลือแนะนำเป็นอย่างดีตลอดช่วงของการทำวิจัย

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ปณิธาน ลักคุณะประสิทธิ์ และรองศาสตราจารย์ ดร. เอกชัย ลีลาวัศม์ กรรมการติดตามและประเมินผลโครงการวิจัย ที่ได้ให้คำแนะนำทำให้ผลงานวิจัยมีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ผู้วิจัยขอขอบคุณ นางสาวจักษณี วิรุพหฺศรี ผู้ช่วยวิจัย ที่ช่วยทำให้โครงการวิจัยนี้สำเร็จผล และขอขอบพระคุณ คุณจักร์กริช พิบูลย์ไพโรจน์ ผู้จัดการแผนกเทคนิคการทดสอบ กองทดสอบเครื่องกล การไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทย ที่ให้ความกรุณากำหนดปัญหาใบพัดเทอร์ไบน์ ซึ่งนำมาใช้ในการคำนวณ เพื่อแสดงประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากโครงการวิจัยนี้



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อโครงการวิจัย: ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

ชื่อผู้วิจัย: ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ

เดือนและปีที่ทำวิจัยเสร็จ: กุมภาพันธ์ 2541



บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้ แสดงการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของ
แข็งที่มีความยืดหยุ่นอย่างเป็นขั้นเป็นตอน โดยเริ่มจากปัญหาในหนึ่งมิติซึ่งเป็นการ
วิเคราะห์การเสีรูปของแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี ปัญหาใน
สองมิติซึ่งเป็นการวิเคราะห์การเสีรูปและความเค้นของปัญหาของแข็งที่มีความสมมาตร
รอบแกน ไปจนถึงการวิเคราะห์การเสีรูปและความเค้นของปัญหาของแข็งในสามมิติ ซึ่งมี
เป้าหมายหลักคือการนำไปวิเคราะห์ไบพัดกัณฑ์ไอ้รูปทรงตันทั่วไป ที่ทำงานภายใต้
ความดัน อุณหภูมิ และแรงเหวี่ยงรอบตัวเองสูง

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาในหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติดังกล่าวนี
ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษดกค่างของกัลเลอร์คินเข้ากับ
ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงความสมดุลของแต่ละปัญหา ตลอดจนได้ประดิษฐ์ไฟไนต์
เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันขึ้น โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้ได้มีการ
ตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาที่มีรูปร่างอย่างง่ายซึ่งสามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้ ก่อน
นำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป

Project title: Finite Element Method for Analysis of Thermal Stress Problems

Name of the investigator: Professor Dr. Pramote Dechaumphai

Month and year of project completion: February 1998

Abstract

This research project describes the finite element method for solving elastic solid problems, step by step in details. The project starts from one-dimensional problem for deformation analysis of annular flat plate with radial temperature distribution. The two-dimensional problem for deformation and thermal stress analysis of axisymmetric configuration. And finally, the three-dimensional problem for solving deformation and thermal stresses of turbine blades operated under high pressure, temperature, and centrifugal force.

Finite element equations for these one, two, and three-dimensional problems have been derived using the Galerkin method of weighted residuals. The corresponding computer programs have also been developed. These programs have been verified by using a number of example problems that have exact solutions before applying to solve more realistic problems with complex configuration.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ii
บทคัดย่อภาษาไทย	iii
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	iv
สารบัญ	v
รายการภาพ	viii
รายการสัญลักษณ์	xiii
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย	1
1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	2
1.3 วัตถุประสงค์และขอบเขตของการวิจัย	2
1.4 วิธีดำเนินการวิจัยโดยสรุป	3
บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับวิเคราะห์ความเค้นในของแข็ง	5
เนื่องจากอุณหภูมิ (Thermal Stress)	
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งในสามมิติ	5
2.2 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)	10
2.3 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	11
บทที่ 3 การวิเคราะห์การเสียรูปของแผ่นวงแหวนบาง	13
ที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี	
3.1 สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น	13
3.2 เงื่อนไขขอบเขต	14

	หน้า
3.3	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ 15
3.4	ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม 23
3.5	รายละเอียดของโปรแกรม 24
3.6	ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม DISEXACT และ DISLNEAR ต้องการ 24
3.7	ตัวอย่าง 26
บทที่ 4	การวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้น 36
	สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน
4.1	สมการเชิงอนุพันธ์ 36
4.2	เงื่อนไขขอบเขต 37
4.3	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ 38
4.4	ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม 44
4.5	รายละเอียดของโปรแกรม 45
4.6	ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ 45
4.7	ตัวอย่างและการนำไปประยุกต์ใช้ 51
บทที่ 5	การวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นของใบพัดกังหันไอน้ำ 63
5.1	สมการเชิงอนุพันธ์ 63
5.2	เงื่อนไขขอบเขต 63
5.3	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ 64
5.4	ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม 72
5.5	รายละเอียดของโปรแกรม 73
5.6	ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ 74
5.7	ตัวอย่างและการนำไปประยุกต์ใช้ 79
บทที่ 6	บทสรุปและข้อเสนอแนะ 95
6.1	บทสรุป 95
6.2	ข้อเสนอแนะ 96

	หน้า
บรรณานุกรม	98
ภาคผนวก	100
ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรม DISEXACT	101
รายละเอียดของโปรแกรม DISLNEAR	106
ภาคผนวก ข รายละเอียดของโปรแกรม AXISSYM	111
ภาคผนวก ค รายละเอียดของโปรแกรม SOLID3D	125



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เลขหมู่ ดพ
 ดศ 15
เลขทะเบียน 009809
วัน,เดือน,ปี 8 ธ.ค. 42

รายการภาพประกอบ

		หน้า
รูปที่ 2.1	ความสมดุลของแข็งในสามมิติ	5
รูปที่ 2.2	ความสมดุลของเอลิเมนต์เล็ก ๆ ปริมาตร dV ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน	6
รูปที่ 2.3	ความสมดุลของเอลิเมนต์เล็ก ๆ ปริมาตร dV ในระบบพิกัดทรงกระบอก	8
รูปที่ 3.1	แผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี	13
รูปที่ 3.2	การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี	15
รูปที่ 3.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการกระจายของอุณหภูมิเป็นฟังก์ชัน $T = a + b \ln(r)$	16
รูปที่ 3.4	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการกระจายของอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันเส้นตรง	20
รูปที่ 3.5	แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ DISEXACT และ DISLNEAR	24
รูปที่ 3.6	การจัดแบ่งเอลิเมนต์ และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISEXACT	28
รูปที่ 3.7	ข้อมูลในไฟล์ชื่อ DISK1.DAT	28
รูปที่ 3.8	ลักษณะผลลัพธ์ ในไฟล์ EXACT1.OUT	29
รูปที่ 3.9	การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ	30
รูปที่ 3.10	ข้อมูลในไฟล์ชื่อ DISK2.DAT	30
รูปที่ 3.11	ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ EXACT2.OUT	31

	หน้า
รูปที่ 3.12 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อ	31
รูปที่ 3.13 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISLNEAR	32
รูปที่ 3.14 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ LINEAR1.OUT	33
รูปที่ 3.15 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISLNEAR เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ	33
รูปที่ 3.16 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ LINEAR2.OUT	34
รูปที่ 3.17 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISLNEAR เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อ	34
รูปที่ 4.1 ตัวอย่างปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนในระบบพิกัดทรงกระบอก	36
รูปที่ 4.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน	37
รูปที่ 4.3 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ AXISSYM	45
รูปที่ 4.4 รูปแบบของไฟล์ข้อมูลตัวอย่างที่โปรแกรม AXISSYM ต้องการ	50
รูปที่ 4.5 รูปแบบของไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม AXISSYM	50
รูปที่ 4.6 แผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω rad/s	51
รูปที่ 4.7 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นกลมตันบางในรูปที่ 4.4	53
รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาของแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่	54

รูปที่ 4.9	การเปรียบเทียบความเค้นในแนวสัมผัส ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาของแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่	54
รูปที่ 4.10	การเปรียบเทียบความเค้นในแนวรัศมี ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาของแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่	55
รูปที่ 4.11	แผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o	55
รูปที่ 4.12	การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นวงแหวนบางในรูปที่ 4.11	57
รูปที่ 4.13	การเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาของแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o	57
รูปที่ 4.14	การเปรียบเทียบความเค้นในแนวสัมผัสระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาของแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o	58
รูปที่ 4.15	การเปรียบเทียบความเค้นในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาของแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o	58
รูปที่ 4.16	แบบจำลองของ Turbine Casing ซึ่งรับแรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o และอุณหภูมิ	59
รูปที่ 4.17	วิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) ของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน	60
รูปที่ 4.18	การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของ Turbine Casing ในรูปที่ 4.16	61
รูปที่ 4.19	ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นบน Turbine Casing ในรูปที่ 4.16	62
รูปที่ 5.1	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็งยึดหยุ่นได้ในสามมิติ	64

รูปที่ 5.2	ลักษณะของเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า ซึ่งใช้ในปัญหาของแข็งยึดหยุ่นได้ในสามมิติ	64
รูปที่ 5.3	แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ SOLID3D	73
รูปที่ 5.4	ไฟล์ข้อมูลตัวอย่างที่โปรแกรม SOLID3D ต้องการ	78
รูปที่ 5.5	ไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม SOLID3D	79
รูปที่ 5.6	ก้อนสี่เหลี่ยมลูกบาศก์มีอุณหภูมิเท่ากันทั้งก้อน	80
รูปที่ 5.7	ใบพัดกังหันไอน้ำ	81
รูปที่ 5.8	การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของใบพัดกังหันไอน้ำในรูปที่ 5.7	82
รูปที่ 5.9	ใบพัดกังหันไอน้ำภายใต้ความดัน p กระทำตั้งฉากกับผิวด้านหน้าของใบพัด	82
รูปที่ 5.10	ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้ความดัน (จากรูปที่ 5.9)	83
รูปที่ 5.11	ใบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่	84
รูปที่ 5.12	ลักษณะการกระจายความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ซึ่งแสดงในรูปที่ 5.11	84
รูปที่ 5.13	ใบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x	85
รูปที่ 5.14	ลักษณะการกระจายความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x ดังแสดงในรูปที่ 5.13	86
รูปที่ 5.15	ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดกังหันไอน้ำ เมื่อทำงานภายใต้สภาวะร่วมกันระหว่างความดันคงที่ รูปที่ 5.9 อัตราเร็วเชิงมุมคงที่ รูปที่ 5.11 และ อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x รูปที่ 5.13	87
รูปที่ 5.16	ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์	88
รูปที่ 5.17	การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ในรูปที่ 5.16	89

รูปที่ 5.18	ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้ความดันตั้งฉากกับผิวหน้า ซึ่งแปรผันตามแกน z	89
รูปที่ 5.19	ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และ การเสียรูปที่เกิดขึ้นกับใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ ภายใต้ความดัน แบบแปรผันตามแกน z ดังแสดงในรูปที่ 5.19	90
รูปที่ 5.20	ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้ความเร็วเชิงมุมคงที่ รอบแกน z	91
รูปที่ 5.21	ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และ การเสียรูปที่เกิดขึ้นกับใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ ภายใต้ความเร็วเชิงมุมคงที่ รอบแกน z ดังแสดงในรูปที่ 5.20	91
รูปที่ 5.22	ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x และแกน z	92
รูปที่ 5.23	ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และ การเสียรูปที่เกิดขึ้นกับใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ ภายใต้อุณหภูมิ ซึ่งแปรผันตามแกน x และแกน z ดังแสดงในรูปที่ 5.22	93
รูปที่ 5.24	ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และ การเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ เมื่อทำงานภายใต้สภาวะ ร่วมกันระหว่างความดันคงที่ รูปที่ 5.18 อัตราเร็วเชิงมุมคงที่ รูปที่ 5.20 และอุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x รูปที่ 5.22	94

คำอธิบายสัญลักษณ์

f	แรงวัตถุ
k	ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน
\hat{n}	เวกเตอร์ตั้งฉากกับพื้นผิว
p	ความดัน
r	ระยะในแนวรัศมี
$u(r)$	ระยะเคลื่อนตัวในแนวรัศมี
$u(x)$	ระยะเคลื่อนตัวในแนวแกน x
v	ระยะเคลื่อนตัวในแนวแกน y
w	ระยะเคลื่อนตัวในแนวแกน z
x	ระยะในแนวแกน x
y	ระยะในแนวแกน y
z	ระยะในแนวแกน z
A	พื้นที่
[B]	เมตริกซ์ของความเครียดกับการเคลื่อนตัว
[C]	เมตริกซ์ของความเค้นกับความเครียด
E	ค่าคงที่ของความยืดหยุ่น
N_i	ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับการเคลื่อนตัว
[N]	เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ สำหรับการเคลื่อนตัว
R	ค่าเศษตกค้างในระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของ กิลเลอร์คิน

\vec{T}	เวกเตอร์ของความเค้นที่ผิว
T	อุณหภูมิ
T_0	อุณหภูมิที่วัสดุั้นนั้นไม่มีความเค้น
V	ปริมาตร
Ω	ขอบเขตของปริมาตร
Γ	ขอบเขตของพื้นผิว
ρ	ความหนาแน่นของวัสดุ
θ	มุมในระบบพิกัดทรงกระบอก
v	อัตราส่วนปัวส์ซง
α	ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน
ω	อัตราเร็วเชิงมุมรอบแกน z
σ	ความเค้นในแนวตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน
ε	ความเครียดในแนวตั้งฉาก
γ	ความเครียดเฉือน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ



1.1 ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

ความสามารถในการจำลองปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในผลิตภัณฑ์ต่างๆ ได้กลายเป็นปัจจัยที่สำคัญสำหรับการออกแบบให้มีประสิทธิภาพในปัจจุบัน ผลิตภัณฑ์ต่างๆ นั้น โดยปรกติจะมีรูปร่างที่ซับซ้อนทำให้ยากแก่การคำนวณที่จะนำไปสู่การออกแบบที่ถูกต้องและเหมาะสม ยกตัวอย่างเช่น การออกแบบใบพัดกังหันไอน้ำ (Turbine Blade) ในโรงไฟฟ้าซึ่งมีรูปร่างโค้งมนซับซ้อนและหมุนด้วยความเร็วรอบสูง โดยทำงานภายใต้แรงเหวี่ยงตัวที่อุณหภูมิสูง การออกแบบปัญหาทางวิศวกรรมเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงดังเช่นตัวอย่างของใบพัดกังหันไอน้ำที่ยกมานี้ ได้กลายมาเป็นปัจจัยที่สำคัญและต้องการระเบียบวิธีการคำนวณที่เหมาะสม เพื่อทำนายปรากฏการณ์ที่จะเกิดขึ้นขณะการใช้งาน ซึ่งจะนำไปสู่การออกแบบที่ดีที่สุดก่อนการสร้างขึ้นมาเป็นของจริง

เนื่องจากปัญหาในลักษณะเช่นนี้ได้ถูกออกแบบให้มีรูปร่างที่ซับซ้อน ระเบียบวิธีการคำนวณ (Computational Method) ที่จัดได้ว่ามีประสิทธิภาพมากที่สุดสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าว คือ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ได้รับการพัฒนาขึ้นมาอย่างต่อเนื่อง โดยปัญหาส่วนใหญ่ที่ได้รับการวิเคราะห์กันมานั้นมักเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกลศาสตร์ของแข็ง (Solid Mechanics) หรือปัญหาทางด้านโครงสร้าง (Structure) เช่นการออกแบบสะพาน เป็นต้น ในขณะที่ปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อน (Heat Transfer) นั้นเพิ่งเริ่มถูกทำการวิจัยค้นคว้า ยิ่งไปกว่านั้น ปัญหาของใบพัดกังหันไอน้ำ ดังที่ยกมาในตอนต้น เป็นปัญหาที่คาบเกี่ยวระหว่าง 2 สาขานี้ ซึ่งต้องการการทำวิจัยและพัฒนาอีกเป็นอย่างมาก ทั้งนี้เนื่องมาจากสาเหตุสำคัญที่ว่า อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปในผลิตภัณฑ์นั้นมีผลโดยตรงกับประสิทธิภาพการใช้งานของผลิตภัณฑ์ ยกตัวอย่างเช่น ใบพัดกังหันไอน้ำอาจจะแตกเสียหายได้ง่ายขึ้นหากทำงานภายใต้อุณหภูมิที่สูงมากขึ้น เป็นต้น

การทำการคำนวณเพื่อวิเคราะห์ปรากฏการณ์ต่างๆ ดังกล่าว จำเป็นต้องอาศัยองค์ประกอบของความรู้ที่สำคัญหลายๆ อย่าง นับตั้งแต่ความรู้ความเข้าใจในสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาที่ศึกษาอยู่นั้น ความรู้ในการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างถูกต้องและเป็นขั้นเป็นตอน ความรู้และประสบการณ์ในการเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ที่เหมาะสมได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมไปถึงความสามารถในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน

1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากงานวิจัยทางด้านนี้ต้องการองค์ความรู้ที่คาบเกี่ยวกันระหว่าง 2 สาขา กล่าวคือ สาขาการถ่ายเทความร้อนซึ่งก่อให้เกิดลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ อันเป็นผลต่อเนื่องต่อการเสีรูปร่างและความเค้นที่เกิดขึ้นในสาขากลศาสตร์ของแข็ง การคาบเกี่ยวกันของความรู้ใน 2 สาขาดังกล่าวทำให้ผลงานวิจัยทางด้านนี้มีค่อนข้างน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับกรวิจัยเฉพาะด้านในสาขาใดสาขาหนึ่งเพียงอย่างเดียว งานวิจัยด้านสาขาการถ่ายเทความร้อนเพื่อคำนวณหาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเริ่มจากการแก้สมการการอนุรักษ์พลังงานด้วยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดย Emery & Carson และต่อมาโดย Silvester & Konard ซึ่งใช้เอลิเมนต์ชนิดสามเหลี่ยมที่มีฟังก์ชันการประมาณภายใน (Interpolation function) แบบแผ่นเรียบ (Flat plane) จากนั้น Reddy & Shippy ได้ขยายแนวความคิดโดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่มีอันดับสูงขึ้นเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีค่าความเที่ยงตรงมากขึ้น ในขณะเดียวกัน งานวิจัยทางด้านกลศาสตร์ของแข็งเพื่อคำนวณหาการเสีรูปร่างและความเค้นอันเนื่องมาจากแรงภายนอกที่มากกระทำนั้นได้ถูกเสนอโดย Wilson รวมทั้ง Clough & Rashid และต่อมาโดย Dunavant งานวิจัยเหล่านี้ล้วนเน้นจำเพาะเจาะจงลงในสาขาใดสาขาหนึ่ง กล่าวคือสาขาการถ่ายเทความร้อน หรือสาขากลศาสตร์ของแข็ง โดยไม่มีการเชื่อมโยงกัน ยิ่งไปกว่านั้น ฟังก์ชันการประมาณภายในที่ใช้ล้วนอยู่ในรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดา ซึ่งไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงสำหรับปัญหาบางปัญหา เช่น Turbine casing ในโรงไฟฟ้าซึ่งทำงานด้วยความเร็วรอบสูงภายใต้ อุณหภูมิสูงได้ เป็นต้น

1.3 วัตถุประสงค์และขอบเขตของการวิจัย

จากเหตุผลดังอธิบายในหัวข้อ 1.2 และแนวทางการวิจัยตามที่ได้เสนอในแบบเสนอของโครงการวิจัยนี้ตั้งแต่แรก วัตถุประสงค์หลักของโครงการวิจัยนี้เพื่อ:

1. ศึกษาทฤษฎีและระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในปัญหาของแข็งภายใต้แรงที่มากกระทำและอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป
2. ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน โดยทำการศึกษาและประดิษฐ์อย่างเป็นขั้นเป็นตอน เพื่อให้เกิดความเข้าใจและมีศักยภาพในการพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ด้วยตนเอง โดยเริ่มจากปัญหาในหนึ่งมิติ สองมิติ จนไปถึงปัญหาของใบพัดกังหันไอน้ำซึ่งเป็นปัญหาของแข็งรูปทรงตันในสามมิติทั่วไปตามลำดับ ซึ่งทำงานภายใต้ ความดันสูง แรงเหวี่ยงรอบตัวเองสูง และอุณหภูมิสูง

3. รายงานการวิจัยนี้จะแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันอย่างละเอียดและเป็นขั้นเป็นตอน จากปัญหาในหนึ่งมิติ สองมิติ ไปจนถึงปัญหาในสามมิติ เพื่อให้ผู้สนใจสามารถศึกษาและทำความเข้าใจตามขั้นตอนที่ได้อธิบายอย่างละเอียด ซึ่งสามารถใช้เป็นพื้นฐานเพื่อนำไปสู่การทำวิจัยในระดับสูงขึ้นไปได้

เนื่องจากการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้นนี้ ต้องการองค์ประกอบของความรู้พื้นฐานในหลาย ๆ ด้านดังที่อธิบายมาแล้ว โดยเฉพาะความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในปัญหานี้ และความรู้ขั้นตอนในการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับสมการคณิตศาสตร์เหล่านี้ ดังนั้นขอบเขตของการวิจัยสำหรับโครงการนี้ จึงประกอบด้วย:

1. การศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็งอันเนื่องมาจากแรงภายนอกที่มารวมทั้งอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อการวิเคราะห์ไบพัตกัทนไอน้ำในขั้นสุดท้าย ซึ่งแรงที่กระทำจะประกอบด้วยแรงเหวี่ยงตัวจากการหมุนรอบตัวเองด้วยความเร็วสูง และแรงดันจากไอน้ำที่มาปะทะ

2. การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ โดยการใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals, Galerkin) สำหรับปัญหาในหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ

3. สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้จะนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยตรง โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้จะถูกตรวจสอบความถูกต้องอย่างเป็นขั้นเป็นตอน โดยเริ่มจากปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง ก่อนนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป

4. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ สามารถนำไปวิเคราะห์ไบพัตกัทนไอน้ำที่ทำงานภายใต้ความดัน แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง และอุณหภูมิสูงได้

1.4 วิธีดำเนินการวิจัยโดยสรุป

เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหลักการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ รวมทั้งวิธีการปรับปรุงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ ก่อนที่จะไปสู่การแก้ปัญหาไบพัตกัทนไอน้ำ ซึ่งเป็นปัญหาของแข็งรูปทรงซับซ้อนในสามมิติและทำงานภายใต้สภาวะที่ซับซ้อน จึงได้ทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันอย่างเป็นขั้นเป็นตอน จากปัญหาพื้นฐานในหนึ่งมิติ ไปจนถึงปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนในสามมิติ ดังต่อไปนี้

1. วิเคราะห์ปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ในหนึ่งมิติ โดยปัญหาที่ใช้วิเคราะห์ คือ การวิเคราะห์การเสียรูป (Deformation) ของแผ่นทรงกลมที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี (Circular disc with radial temperature variation) การวิเคราะห์ปัญหาหนึ่งมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ ก่อให้เกิดแนวความคิดต่างๆในการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจะทำให้ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมีความเที่ยงตรงมากขึ้นกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้กันทั่วไป แนวความคิดดังกล่าวจะเป็นประโยชน์ต่อการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป

การวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นของปัญหาของแข็งในหนึ่งมิติเอง ดังที่ได้อธิบายโดยละเอียดในบทที่ 3 เป็นงานที่เป็นส่วนริเริ่มในการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในรูปแบบใหม่ที่ต่างจากรูปแบบที่ใช้กันโดยทั่วไป ที่ก่อให้เกิดผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เป็นผลเฉลยแม่นยำ แนวคิดดังกล่าวนี้สามารถนำไปประยุกต์กับการแก้ปัญหาในสาขาอื่น ๆ นอกเหนือจากสาขาการถ่ายเทความร้อนและสาขากลศาสตร์ของแข็งที่สามารถทำให้ผลลัพธ์จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น

2. วิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่ยืดหยุ่นได้ในสองมิติ โดยปัญหาที่เลือกใช้วิเคราะห์คือ การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวและความเค้นของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric problem) ซึ่งรับภาระความดัน อุณหภูมิ และแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการประดิษฐ์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาในสองมิตินี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาหลายๆชนิดอันจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีแบบเดิม (Classical method) ต่างๆที่เคยใช้กันมาในอดีต

3. วิเคราะห์ปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ในสามมิติ ซึ่งเป็นเป้าหมายหลักของงานวิจัยชิ้นนี้ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาใบพัดกังหันไอน้ำที่มีรูปทรงตันทั่วไป ซึ่งรับภาระความดัน อุณหภูมิ และแรงเหวี่ยงรอบตัวเองได้

กระบวนการดังกล่าวข้างต้นนี้ นอกจากจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่เป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาต่างๆได้แล้ว ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่า รายละเอียดเนื้อหาของคณิตศาสตร์พื้นฐาน ขั้นตอนการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่อธิบายโดยละเอียด ขั้นตอนการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ และรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆที่บรรจุในรายงานฉบับสมบูรณ์นี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการทำวิจัยในสาขาอื่นๆที่ต้องใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เช่นกัน

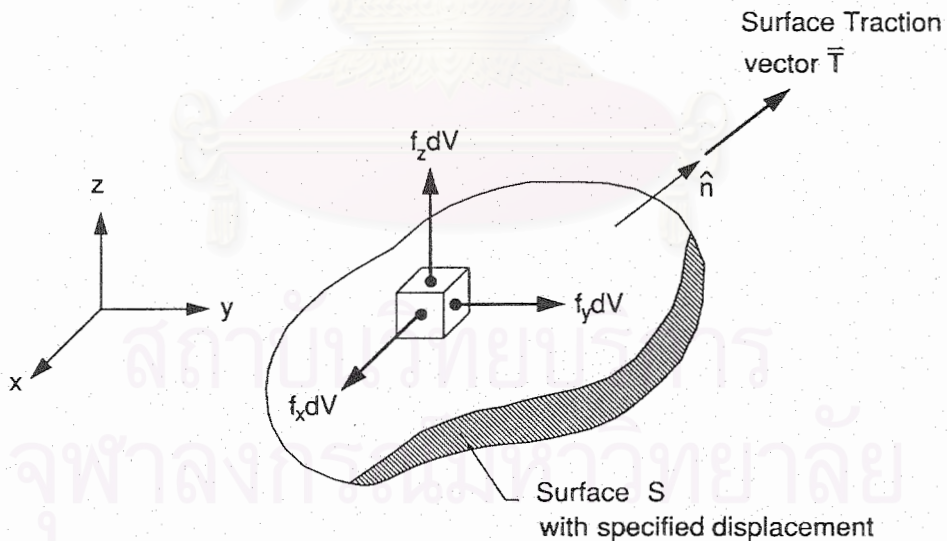
บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับวิเคราะห์ความเค้นในของแข็ง เนื่องจากอุณหภูมิ (Thermal Stress)

ในบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ความเค้นและการเสียรูปของของแข็งในสามมิติ ซึ่งประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็ง สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว และลักษณะเงื่อนไขขอบเขตต่างๆที่กระทำกับปัญหาของแข็งในสามมิติ โดยแยกอธิบายเป็นระบบพิกัดต่างๆ เพื่อความสะดวกต่อการพิจารณาให้สอดคล้องกับปัญหา จากนั้นจึงอธิบายรายละเอียดเกี่ยวกับขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งในสามมิติ

ของแข็งที่มีการยึดหยุ่นได้ในสามมิติ มีแรงภายนอกต่างๆกระทำภายใต้ความสมดุลได้แสดงในรูปที่ 2.1

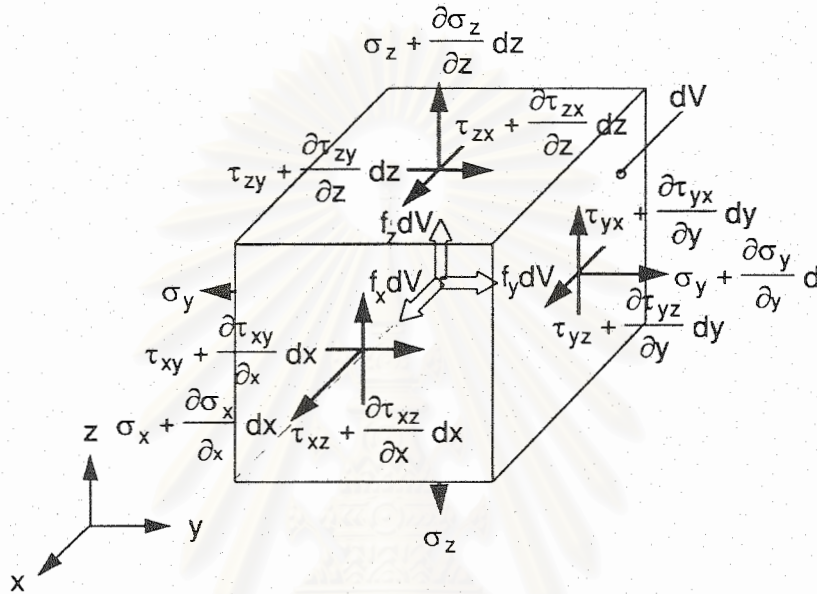


รูปที่ 2.1 ความสมดุลของแข็งในสามมิติ

เมื่อมีแรงภายนอกกระทำกับวัตถุจะทำให้เกิดการเสียรูปและความเค้นขึ้น สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงความสมดุลของแข็งสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยพิจารณาความเค้นต่างๆที่กระทำกับเอลิเมนต์เล็กๆ ปริมาตร dV ในที่นี้จะแยกพิจารณาในแต่ละระบบพิกัด ดังต่อไปนี้

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system)

สำหรับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เอลิเมนต์เล็กๆ ภายใต้สภาวะความสมดุลเมื่อมีความเค้นต่างๆกระทำ ได้แสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ความสมดุลของเอลิเมนต์เล็กๆ ปริมาตร dV ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

โดย σ_x , σ_y , σ_z แทนความเค้นตั้งฉาก (Normal stress) ในแนวแกน x , y , z ตามลำดับ และ τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} แทนความเค้นเฉือน (Shear stress) ส่วน f_x , f_y , f_z แทนแรงวัตถุ (Body force) ในแนวแกน x , y , z ตามลำดับ เมื่อพิจารณาถึงความสมดุลของเอลิเมนต์เล็กๆ ปริมาตร dV ในรูปที่ 2.2 โดยการสมดุลแรงตามแนวแกน x , y , z จะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งแสดงความสมดุลของของแข็งในสามมิติ ดังนี้

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

โดย f_x, f_y, f_z แทนแรงวัตถุ (Body force) ในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ ซึ่งแรงวัตถุนี้อาจประกอบด้วย แรงเหวี่ยงรอบตัว แรงเนื่องจากน้ำหนักวัตถุ นอกจากแรงต่างๆ เหล่านี้ที่กระทำกับของแข็งก่อให้เกิดความเค้นและการเคลื่อนตัวแล้ว ของแข็งในสามมิติในรูป 2.1 อาจมีความเครียดเริ่มต้น (Prestrain) ซึ่งเกิดขึ้นอยู่ก่อน โดยความเครียดเริ่มต้นอาจเกิดมาจากหลายสาเหตุ สำหรับปัญหาที่มีการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง ความเครียดเริ่มต้นเป็นผลมาจากอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ กันซึ่งอาจมีค่าไม่เท่ากัน เวกเตอร์ของความเค้นเริ่มต้นเนื่องจากอุณหภูมิ คือ

$$\{\varepsilon_0\}^T = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (2.2)$$

โดย α แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัว และ ΔT แทนอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปจากอุณหภูมิ T_0 ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น โดย

$$\Delta T = T(x, y, z) - T_0 \quad (2.3)$$

เนื่องจากความเครียดเริ่มต้นเป็นความเค้นที่เกิดขึ้นก่อน ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-strain relations) โดยทั่วไป สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ดังนี้

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon - \varepsilon_0\} \quad (2.4)$$

โดย

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}] \quad (2.5)$$

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}] \quad (2.6)$$

โดย $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ แทนความเครียดในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ (Normal Strain) ส่วน $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ แทนความเครียดเฉือน (Shear Strain) และ

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

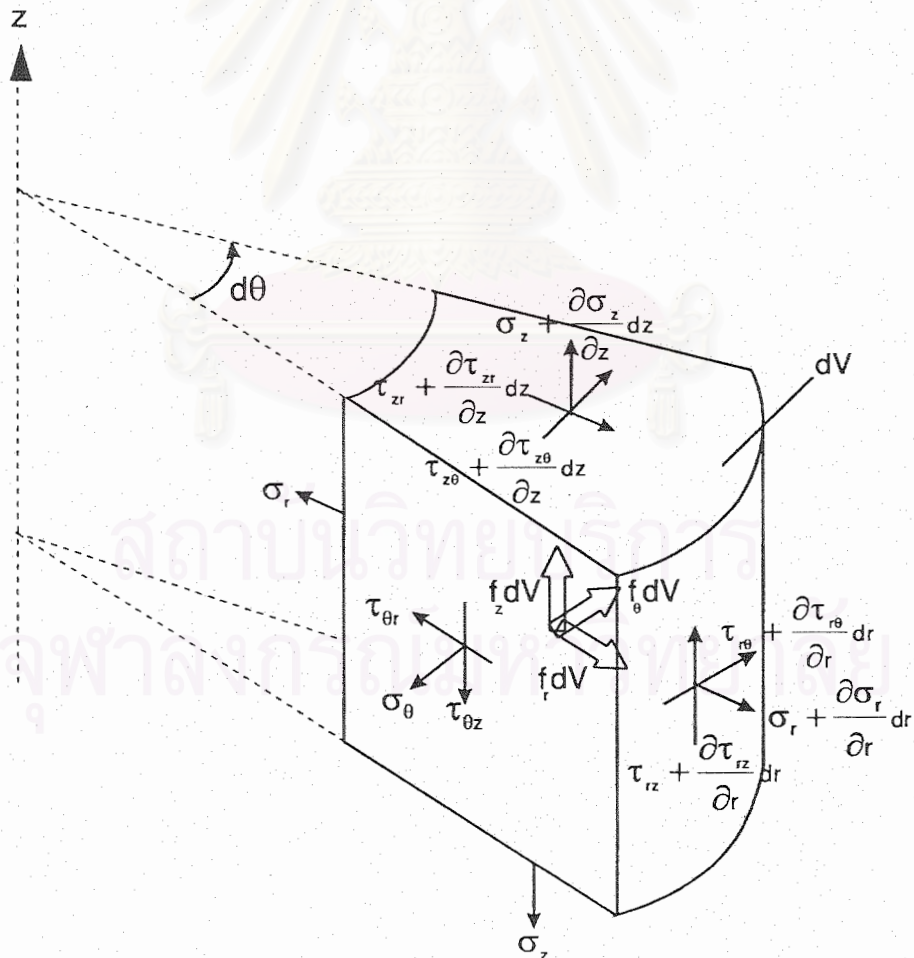
โดย ν คืออัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson ratio), E คือค่าคงที่ของการยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว (Strain-displacement relation) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

โดย u, v, w แทนการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ในระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate system)

สำหรับระบบพิกัดทรงกระบอก เอลิเมนต์เล็กๆปริมาตร dV ภายใต้สภาวะความสมดุลเมื่อมีความเค้นต่างๆมากระทำ ได้แสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ความสมดุลของเอลิเมนต์เล็กๆปริมาตร dV ในระบบพิกัดทรงกระบอก

โดย $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ แทนความเค้นในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ (Normal stress) และ $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ แทนความเค้นเฉือน (Shear stress) ส่วน f_r, f_θ, f_z แทนแรงวัตถุในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ เมื่อพิจารณาถึงความสมดุลของเอลิเมนต์เล็ก ๆ ปริมาตร dV ในรูปที่ 2.3 ในแนวแกน r, θ, z จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + r \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta + rf_r &= 0 \\ \frac{\partial(r\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + r \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \tau_{r\theta} + rf_\theta &= 0 \\ \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + r \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + rf_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ส่วนความเครียดเริ่มต้น (Prestrain) เนื่องจากอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆกันซึ่งอาจมีค่าไม่เท่ากันสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\varepsilon_0\}^T = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (2.9)$$

โดย α แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัว และ ΔT แทนอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปจากอุณหภูมิ T_0 ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น เช่นเดียวกับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

เนื่องจากการรวมถึงความเครียดเริ่มต้น ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-strain relation) ในระบบพิกัดทรงกระบอกโดยทั่วไป คือ

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon - \varepsilon_0\} \quad (2.10)$$

โดย

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{rz} \quad \tau_{\theta z}] \quad (2.11)$$

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{r\theta} \quad \gamma_{rz} \quad \gamma_{\theta z}] \quad (2.12)$$

โดย $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ แทนความเครียดในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ (Normal Strain) ส่วน $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ แทนความเครียดเฉือน (Shear Strain)

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว (Strain-displacement relation) ในระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

โดย u, v, w แทนการเคลื่อนตัวในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ

2.2 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)

ตลอดผิวนอกของของแข็งดังแสดงในรูป 2.1 อาจประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่ต่าง ๆ กัน เช่น มีการกำหนดค่าการเคลื่อนตัวของผิวของแข็งบางส่วน เช่นที่พื้นที่ผิว S ดังรูป 2.1 มีการกำหนดการเคลื่อนตัว ในขณะที่ผิวส่วนอื่นอาจมีการกำหนดความเค้นที่ผิว (Surface traction) เช่น ความดันที่กระทำกับผิวของแข็ง ซึ่งแสดงด้วยเวกเตอร์ \bar{T}

2.2.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

ความเค้นที่ผิว ซึ่งแทนด้วยเวกเตอร์ \bar{T} ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน คือ

$$\bar{T} = T_x \hat{i} + T_y \hat{j} + T_z \hat{k} \quad (2.15)$$

โดย T_x, T_y, T_z แทนความเค้นที่ผิวในทิศแกน x, y, z ตามลำดับ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเค้นย่อยได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

ซึ่ง n_x, n_y, n_z เป็นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k} \quad (2.17)$$

2.2.2 ระบบพิกัดของกระบอก

ความเค้นที่ผิว ในระบบพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\bar{T} = T_r \hat{i} + T_\theta \hat{j} + T_z \hat{k} \quad (2.18)$$

โดย T_r , T_θ , T_z แทนความเค้นที่ผิวในแกน r , θ , z ตามลำดับ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเค้นย่อยได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} T_r \\ T_\theta \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

ซึ่ง n_r , n_θ , n_z เป็นทิศทางโคไซน์เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น

$$\hat{n} = n_r \hat{i} + n_\theta \hat{j} + n_z \hat{k} \quad (2.20)$$

2.3 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ๆทั้งหมด 6 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

- ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ
- ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดลักษณะผลลัพธ์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ในรูปแบบของฟังก์ชันโดยประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation functions)
- ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ (Element equations) โดยการแทนฟังก์ชันโดยประมาณภายในเอลิเมนต์จากขั้นตอนที่ 2 ลงในสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น แล้วทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกันขึ้น
- ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาประกอบกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม (System of simultaneous equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\sum (\text{Element equations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (2.21)$$

โดย $\{\phi\}_{\text{sys}}$ ในที่นี้ แทนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของระบบสมการรวม

- ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ลงในระบบสมการรวม (2.21) ในขั้นตอนที่ 4 แล้วจึงแก้ระบบสมการนั้นเพื่อหาค่าของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ $\{\phi\}_{sys}$
- ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆที่จุดต่อได้แล้ว จึงสามารถทำการหาค่าอื่นๆที่ต้องการทราบต่อไป เช่น เมื่อทราบค่าการเคลื่อนตัว ณ จุดต่อต่างๆของปัญหาแล้ว สามารถนำค่าการเคลื่อนตัวไปใช้ในการหาความเครียด และความเค้นต่อไปได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว และความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้น ตามลำดับ

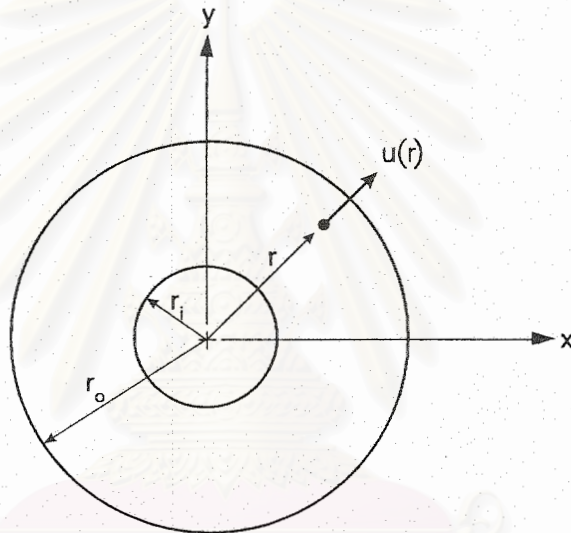


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

การวิเคราะห์การเสีรูปของแผ่นวงแหวนบาง ที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี

ในบทนี้ จะเป็นการวิเคราะห์หาค่าการเสีรูปของแผ่นวงแหวนบางดังแสดงในรูปที่ 3.1 ซึ่งมีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี (Circular disk with radial temperature variation) โดยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเป็นการศึกษาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในรูปแบบต่าง ๆ กันที่สามารถปรับปรุงความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้สูงมากขึ้น



รูปที่ 3.1 แผ่นวงแหวนบางซึ่งมีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี

3.1 สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น

การวิเคราะห์การเสีรูปของแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี สามารถวิเคราะห์ได้เป็นปัญหาในหนึ่งมิติ ภายใต้ระบบพิกัดทรงกระบอก โดยลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลในระบบพิกัดทรงกระบอก ซึ่งจะขอยกมากล่าวในบทนี้อีกครั้งเพื่อความต่อเนื่อง จากสมการ (2.8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta + rf_r &= 0 \\ \frac{\partial(r\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + r\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \tau_{r\theta} + rf_\theta &= 0 \\ \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + rf_z &= 0\end{aligned}\quad (2.8)$$

เนื่องจากเป็นแผ่นบางที่มีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในแนวรัศมีเท่านั้น และหากไม่คำนึงถึงแรงวัตถุด้วยแล้ว สมการความสมดุล (2.8) ลดรูปไปเป็น

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_\theta = 0 \quad (3.1ก)$$

ซึ่งสามารถแปลงรูปได้เป็น

$$\frac{d(\sigma_r)}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (3.1ข)$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัวลดรูปจากสมการ (2.14) เพื่อใช้กับปัญหานี้ ได้แก่

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ซึ่งลดรูปจากสมการ (2.10) ซึ่งสอดคล้องกับปัญหานี้ คือ

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T] \end{aligned} \quad (3.3)$$

แทนสมการ (3.2) และ (3.3) ลงในสมการ (3.1) และเขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี u ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีอุณหภูมิกระจายในแนวรัศมี ดังนี้

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] - (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.4)$$

3.2 เงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาหนึ่งมิติในบทรนี้ ประกอบด้วย

3.2.1 การกำหนดค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี $u(r)$ และ

3.2.2 การกำหนดค่าความเค้นที่ผิว ซึ่งคือ

$$T_r = \sigma_r n_r = \sigma_r \quad \text{โดย} \quad n_r = 1 \quad (3.5)$$

ส่วนลักษณะของอุณหภูมิซึ่งแปรผันตามรัศมี สามารถประดิษฐ์ได้จากสมการของการถ่ายเทความร้อนซึ่งคือ

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (3.6)$$

หากทำการอินทิเกรตสองครั้ง จะได้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิในรูปแบบดังนี้

$$T(r) = a + b \ln(r) \quad (3.7)$$

โดย a และ b คือ ค่าคงที่จากการอินทิเกรต

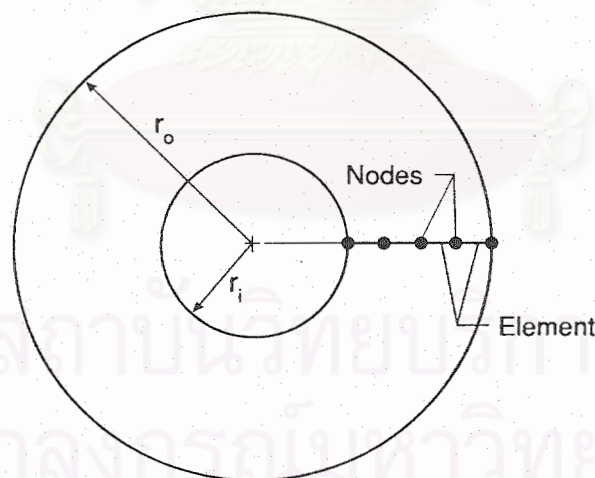
3.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างเป็นขั้นเป็นตอน แล้วจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์เพื่อความสะดวกในการนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป โดยจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

3.3.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นยำ

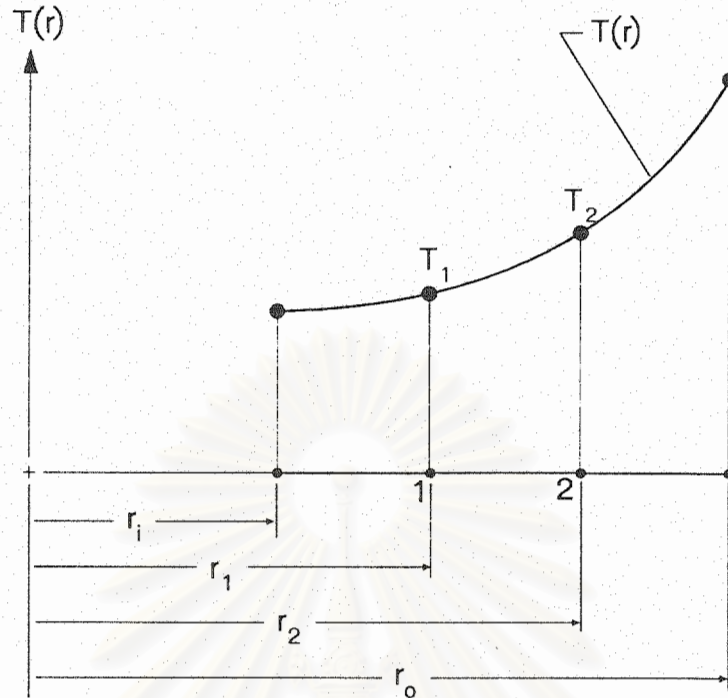
3.3.1ก) การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี เพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นยำ

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูป 3.2



รูปที่ 3.2 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี

ขั้นตอนที่ 2 สมมุติการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัว โดยต้องการให้ได้ผลเฉลยตรงกับผลเฉลยแม่นยำของสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น (3.4) ซึ่งมีการกระจายของอุณหภูมิที่ถูกต้องดังสมการ (3.7) รูปแบบของการกระจายอุณหภูมิดังกล่าวของแต่ละเอลิเมนต์ ได้แสดงในรูป 3.3



รูปที่ 3.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการกระจายของอุณหภูมิ เป็นฟังก์ชัน $T = a + b \ln(r)$

การประดิษฐ์ฟังก์ชันการกระจายภายในที่มีผลเฉลยแน่นอนตรง สามารถเริ่มได้จากสมการ (3.7)

$$T = a + b \ln r$$

โดยใส่ขอบเขตของอุณหภูมิดังเช่นรูป 3.3 ที่ $r=r_1$ จะมีค่า $T=T_1$ และที่ $r=r_2$ จะมีค่า $T=T_2$ แทนเงื่อนไขเหล่านี้ลงในสมการ (3.7) เพื่อหาค่าคงที่ a, b แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$T(r) = \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)} T_1 + \frac{\ln(r_1/r)}{\ln(r_1/r_2)} T_2 \quad (3.8)$$

จากนั้นแทนค่า $T(r)$ จากสมการ (3.8) นี้ ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (3.4) แล้วแก้สมการเพื่อหาค่าตอบโดยทั่วไปจะได้

$$u(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{\alpha c(1+\nu)}{2} r \ln(r) \quad (3.9)$$

โดย c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ และกำหนดให้ $c = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$ (3.10)

จากนั้น ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของการเคลื่อนตัว โดย

$$u(r=r_1) = u_1, \quad u(r=r_2) = u_2 \quad (3.11)$$

แทนสมการ (3.10), (3.11) ลงในสมการ (3.9) เพื่อหาค่าคงที่ c_1, c_2 แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$u(r) = \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{r_1}{r} u_1 + \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{r_2}{r} u_2 + \frac{\alpha(1+\nu)c}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left[r r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) + r r_2^2 \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) - \frac{r_2^2 r_1^2}{r} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \right] \quad (3.12)$$

ซึ่ง $u(r)$ จากสมการ (3.12) ที่ได้นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันประมาณภายในได้ ดังนี้

$$u(r) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 \quad (3.13)$$

โดย

$$N_1 = \left(\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{r_1}{r} \quad N_2 = \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{r_2}{r}$$

$$N_3 = \frac{\alpha(1+\nu)c}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left[r r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) + r r_2^2 \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) - \frac{r_2^2 r_1^2}{r} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \right]$$

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษดกข้างของกัลเลอร์คิน โดยเริ่มจากการใช้ค่าเศษดกค้ำ R ,

$$R = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] - (1+\nu) \alpha \frac{dT}{dr} \quad (3.14)$$

จากนั้นคูณด้วยค่าน้ำหนัก W_i แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\int_{r_1}^{r_2} W_i R dr = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

แทนค่า R จาก (3.14) ลงใน (3.15) แล้วอินทิเกรตทีละส่วน (Integrate by parts) จะได้

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r} \frac{dW_i}{dr} \frac{d(ru)}{dr} \right] dr = W_i \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} W_i (1+\nu) \alpha \frac{dT}{dr} dr \quad (3.16)$$

ด้วยการใช้ $W_i = N_i$ (Bubnov-Galerkin) แล้วแทนค่า N_i จาก (3.13) ลงใน (3.16) และจัดให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ จะได้

$$\begin{aligned}
& \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{dr} \\ \frac{dN_2}{dr} \\ \frac{dN_3}{dr} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d(rN_1)}{dr} & \frac{d(rN_2)}{dr} & \frac{d(rN_3)}{dr} \end{bmatrix} dr \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} (1+\nu) \alpha \frac{dT}{dr} dr \quad (3.17n)
\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียน (3.17n) ให้อยู่ในรูปแบบสั้นๆ ได้ดังนี้

$$[K]_e \{u\} = \{B\}_e + \{C\}_e \quad (3.17ข)$$

3.3.1ข) รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีเพื่อให้ได้ผลเฉลยแม่นยำ จากสมการ (3.17) เมื่อแยกพิจารณาแต่ละเมตริกซ์ จะได้ดังนี้

เมตริกซ์ $[K]_e$ จากสมการ (3.17) เมื่อแทนค่า N_i จาก (3.13) แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned}
[K]_e &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{-2r_2}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{-\alpha c(1+\nu)}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left(-4r_1r_2 + 3r_2^2 + 2r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_1^2 \right) \\ \frac{-2r_1}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{2r_2}{(r_2^2 - r_1^2)} & \frac{\alpha c(1+\nu)}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left(4r_1r_2 - 3r_1^2 + 2r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - r_2^2 \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1+\nu)^2 \alpha^2 \frac{c^2}{(r_1+r_2)} \left(r_2^2 + 2r_1r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - r_1^2 \right) \end{bmatrix} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน เมตริกซ์ $\{B\}_e$ จากสมการ (3.17) เมื่อแทนค่า N_i จาก (3.13) จะได้

$$\{B\}_e = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-u_1}{r_1} - \frac{du_1}{dr} \\ \frac{u_2}{r_2} + \frac{du_2}{dr} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

และเมตริกซ์ $\{C\}_e$ จากสมการ (3.17) เมื่อแทน $T(r)$ จาก (3.8) และ N_i จาก (3.13) จะได้ว่า

$$\{C\}_e = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (r_1 - r_2) c \alpha \frac{(1 + \nu)}{(r_1 + r_2)} \\ (r_1 - r_2) c \alpha \frac{(1 + \nu)}{(r_1 + r_2)} \\ K_{33} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

แทนสมการ (3.18), (3.19), (3.20) ลงใน (3.17)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

แล้วจัดรูปแบบเมตริกซ์ใหม่ให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

โดย
$$D_1 = C_1 - K_{13} = \frac{\alpha(1 + \nu)c}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left(2r_2^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_2^2 - r_1^2 \right) \quad (3.23)$$

$$D_2 = C_2 - K_{23} = \frac{-\alpha(1 + \nu)c}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left(2r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_2^2 - r_1^2 \right)$$

จากสมการ (3.22), (3.23) แปลงเอลิเมนต์เมตริกซ์ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปสำหรับการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต โดยแปลงพจน์ทางขวาให้อยู่ในรูปของ σ_r หรือความดันที่ผิวจะได้

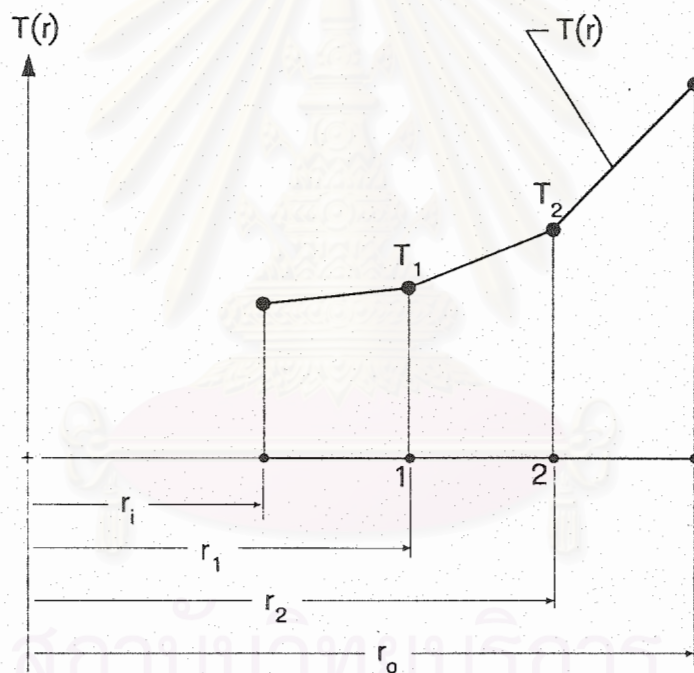
$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{2r_1}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(1 - \nu)}{r_1} & \frac{-2r_2}{r_2^2 - r_1^2} \\ \frac{-2r_1}{r_2^2 - r_1^2} & \frac{2r_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(1 - \nu)}{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ & = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} -\sigma_{r_1} \\ \sigma_{r_2} \end{Bmatrix} + \alpha \begin{Bmatrix} -T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + \frac{\alpha c}{2E(1 - \nu)(r_2^2 - r_1^2)} \begin{Bmatrix} 2r_2^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + r_2^2 - r_1^2 \\ -2r_1^2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - (r_2^2 - r_1^2) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.3.2 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิ

3.3.2ก) การประดิษฐ์สมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีโดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ที่ต่างเป็นฟังก์ชันเส้นตรง

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูป 3.2 เช่นเดียวกับในหัวข้อ 3.3.1

ขั้นตอนที่ 2 สมมุติการกระจายของการเคลื่อนตัวและการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีของแต่ละเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเชิงเส้นตรง รูปแบบการกระจายของอุณหภูมิของแต่ละเอลิเมนต์ ได้แสดงในรูป 3.4



รูปที่ 3.4 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และการกระจายของอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันเส้นตรง

เริ่มจากการกำหนดการเคลื่อนตัวให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเส้นตรง ดังนี้

$$u(r) = c_1 + c_2 r \quad (3.25)$$

ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต $u(r=r_1) = u_1$ และ $u(r=r_2) = u_2$ โดยแทนลงใน (3.25) เพื่อหาค่าคงที่ c_1, c_2 แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$u(r) = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right) u_1 + \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) u_2 \quad (3.26)$$

ซึ่ง $u(r)$ จากสมการ (3.26) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันประมาณภายในได้ดังนี้

$$u(r) = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

โดย
$$N_1 = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right) \quad N_2 = \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) \quad (3.27)$$

ในขณะเดียวกัน หากสมมติการกระจายของอุณหภูมิให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเส้นตรง

$$T(r) = a + br \quad (3.28)$$

แล้วทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตดังแสดงในรูปที่ 3.4 โดยที่ $r = r_1$ มีค่า $T = T_1$ และที่ $r = r_2$ จะมีค่า $T = T_2$ แทนเงื่อนไขเหล่านี้ลงใน (3.28) เพื่อหาค่าคงที่ a, b แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$T(r) = \left(\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \right) T_1 + \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right) T_2 = N_1 T_1 + N_2 T_2 \quad (3.29)$$

โดย N_1, N_2 อยู่ในรูปแบบเดียวกันกับสมการ (3.27)

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ โดยประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่างของกัลเลอร์คินเช่นเดียวกับสมการ (3.14) และ (3.15) จากนั้นทำการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้สมการที่มีรูปแบบในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.16) ดังนี้

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r} \frac{dW_i}{dr} \frac{d(ru)}{dr} \right] dr = W_i \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} W_i (1 + \nu) \alpha \frac{dT}{dr} dr \quad (3.30)$$

จากนั้นใช้ $W_i = N_i$ (Bubnov-Galerkin) แล้วแทนค่า ฟังก์ชันประมาณภายใน N_i จาก (3.27) ลงใน (3.30) และจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์จะได้

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \left\{ \begin{matrix} \frac{dN_1}{dr} \\ \frac{dN_2}{dr} \end{matrix} \right\} \left[\frac{d(rN_1)}{dr} \quad \frac{d(rN_2)}{dr} \right] dr \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} (1 + \nu) \alpha \frac{dT}{dr} dr \quad (3.31ก)$$

สมการ (3.31ก) นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสั้นๆได้ดังนี้

$$[K]_e \{u\} = \{B\}_e + \{C\}_e \quad (3.31ข)$$

3.3.2ข) รายละเอียดของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ สำหรับปัญหาแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี โดยใช้ฟังก์ชันประมาณของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ที่เป็นฟังก์ชันเส้นตรง

จากสมการ (3.31) เมื่อแยกพิจารณาแต่ละเมตริกซ์ จะได้ดังนี้

$$[K]_e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \begin{bmatrix} 2(r_2 - r_1) + r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) & -2(r_2 - r_1) - r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \\ -2(r_2 - r_1) - r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) & 2(r_2 - r_1) + r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

การประดิษฐ์เมตริกซ์ $\{B\}_e$ จากสมการ (3.31) ทำได้โดยแทนค่า N_1, N_2 จาก (3.27) จะได้

$$\{B\}_e = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-u_1}{r_1} - \frac{du_1}{dr} \\ \frac{u_2}{r_2} + \frac{du_2}{dr} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

และเมตริกซ์ $\{C\}_e$ จากสมการ (3.31) โดยแทนค่า N_1, N_2 จาก (3.27) และ $T(r)$ จาก (3.29) จะได้

$$\{C\}_e = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = (1 + \nu)\alpha \frac{(T_1 - T_2)}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

แทนสมการ (3.32), (3.33), (3.34) ลงใน สมการ (3.31) แล้วแปลงเอลิเมนต์เมตริกซ์ให้อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต โดยแปลงพจน์ทางขวาให้อยู่ในรูป σ_r หรือความดันที่ผิว จะได้

$$\frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{2(r_2 - r_1) + r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} + \frac{(1 - \nu)}{r_1} & \frac{-2(r_2 - r_1) - r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} \\ \frac{-2(r_2 - r_1) - r_2 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} & \frac{2(r_2 - r_1) + r_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}{(r_2 - r_1)^2} - \frac{(1 - \nu)}{r_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} -\sigma_{r_1} \\ \sigma_{r_2} \end{Bmatrix} + \frac{\alpha(T_1 + T_2)}{2(1 - \nu)} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

3.4 ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 3.3 ซึ่งได้แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน 2 โปรแกรม ได้แก่

ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของแผ่นวงแหวนที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี โดยใช้ฟังก์ชันประมาณภายในที่เป็นฟังก์ชันแมนตรง เพื่อก่อให้เกิดผลเฉลยแมนตรง โดยโปรแกรมนี้นี้ชื่อว่า DISEXACT

ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของแผ่นวงแหวนที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี โดยใช้ฟังก์ชันประมาณภายในของการเคลื่อนตัวและอุณหภูมิที่ต่างเป็นฟังก์ชันเส้นตรง โดยโปรแกรมนี้นี้ชื่อว่า DISLNEAR

โปรแกรมทั้งสองที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมานี้มีลักษณะการทำงานของโปรแกรมที่คล้ายคลึงกัน ความแตกต่างของทั้งสองโปรแกรมอยู่ที่การสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ภายในโปรแกรมย่อย ELE เพื่อให้สอดคล้องกับสมการของแต่ละชนิดของเอลิเมนต์ซึ่งประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 3.3 นั้น โดยแต่ละโปรแกรมจะประกอบไปด้วย โปรแกรมหลัก (Main program) และอีกหกโปรแกรมย่อย (Subroutine program) ซึ่งมีขั้นตอนการทำงานดังต่อไปนี้

3.4.1 การทำงานเริ่มต้นจากการอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ คุณสมบัติต่างๆของเนื้อโลหะ และตำแหน่งต่างๆของจุดต่อ ฯลฯ ซึ่งการอ่านข้อมูลของปัญหาจะอยู่ในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM]

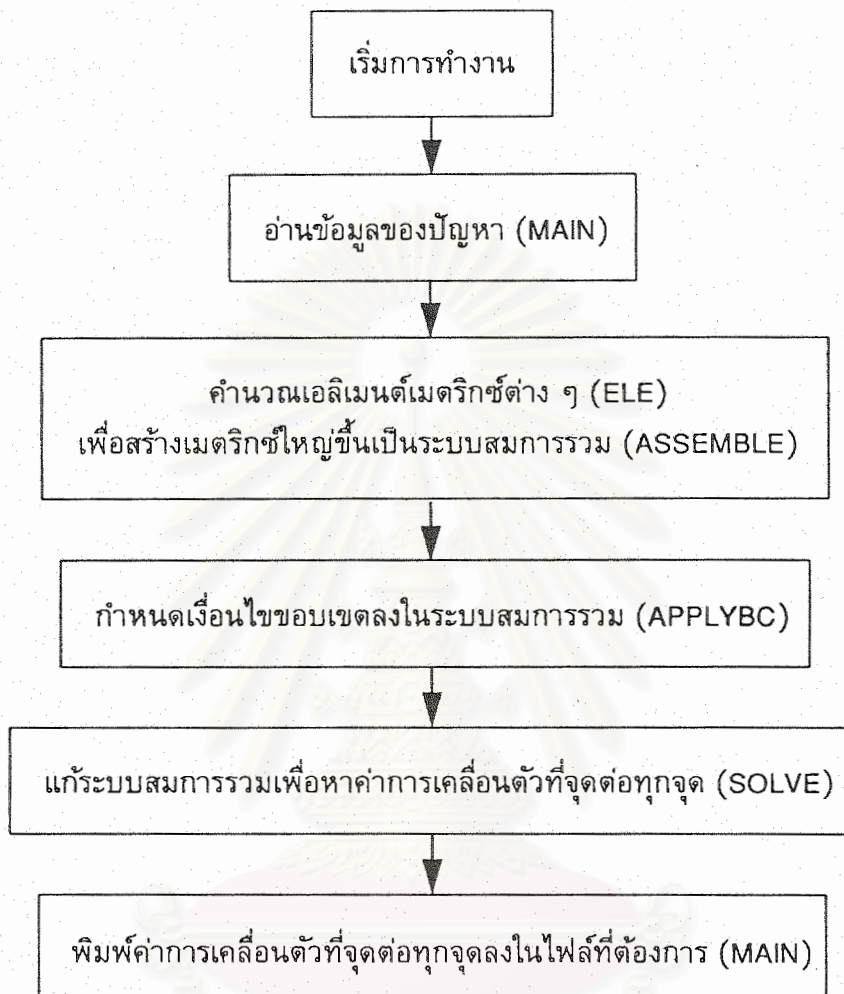
3.4.2 คำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ละเอลิเมนต์ สำหรับโปรแกรม DISEXACT ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จะถูกสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.24) ส่วนโปรแกรม DISLNEAR ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จะถูกสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับสมการ (3.35) โดยเรียกโปรแกรมย่อย ELE [SUBROUTINE ELE] และส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่คำนวณได้ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมด้วยการเรียกโปรแกรมย่อย ASSEMBLE [SUBROUTINE ASSEMBLE]

3.4.3 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่น บางจุดต่อถูกตรึงแน่นเคลื่อนที่ไม่ได้และบางจุดต่อมีความดันในแนวรัศมีมากกระทำ โดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC [SUBROUTINE APPLYBC]

3.4.4 แก่ระบบสมการรวม เพื่อหาค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีที่ทุกจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย SOLVE [SUBROUTINE SOLVE]

3.4.5 พิมพ์ค่าของการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อที่คำนวณได้ลงในไฟล์ที่ต้องการ ซึ่งอยู่ในช่วงท้ายของโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM]

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแผนภูมิการทำงาน ดังแสดงในรูป 3.5



รูปที่ 3.5 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ DISEXACT และ DISLNEAR

3.5 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรม DISEXACT และ DISLNEAR ซึ่งเขียนด้วยภาษาฟอร์แทรน ได้แสดงในภาคผนวก ก

3.6 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม DISEXACT และ DISLNEAR ต้องการ

ลักษณะข้อมูลที่ทั้งสองโปรแกรมต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 5 ส่วนย่อย

ดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก	ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษรอธิบายลักษณะของไฟล์
บรรทัดต่อไป	ประโยคอธิบายลักษณะของไฟล์ ซึ่งมีจำนวนบรรทัดเท่ากับระบุไว้ในบรรทัดแรก
ตัวอย่างเช่น	3 FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR 1-D CIRCULAR DISC WITH RADIAL TEMPERATURE VARIATION

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา และจำนวนจุดต่อที่ถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่

บรรทัดแรก	คำระบุจำนวนเอลิเมนต์ จุดต่อ และจำนวนจุดต่อที่ถูกตรึง
บรรทัดที่ 2	ตัวเลขจำนวนเอลิเมนต์ จุดต่อ และจำนวนจุดต่อที่ถูกตรึง
ตัวอย่างเช่น	NELEM NPOIN NODALCONSTRAINT 9 10 2

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่างๆของปัญหา

บรรทัดแรก	คำระบุคุณสมบัติต่างๆ
บรรทัดที่ 2	ตัวเลขแสดงค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น ค่าอัตราส่วนของปัวซอง ระดับอุณหภูมิที่ไม่มีความเค้น ความดันในแนวรัศมีด้านในของวงแหวน ความดันในแนวรัศมีด้านนอกของวงแหวน อุณหภูมิที่ผิวด้านในของวงแหวน และ อุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของวงแหวน

ตัวอย่างเช่น	ALPHA E PR TREF PI PO TI TO
	11.7E-6 200E9 0.25 0. 0. 0. 10 200

ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก	คำระบุลักษณะของจุดต่อ
บรรทัดต่อไป	ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ คำระบะรัศมีของจุดต่อนั้น
ตัวอย่างเช่น	NODE R 1 .30 2 .35 ⋮ ⋮ 10 .75

ส่วนที่ 5 จุดต่อที่ถูกตรึงแน่น

บรรทัดแรก คำอธิบายจุดต่อที่ถูกตรึงแน่น

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อที่ถูกตรึงแน่น

ตัวอย่างเช่น NODAL CONSTRAINTS

1

10



3.7 ตัวอย่าง

แผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมีจากสมการ (3.7) คือ $T(r) = a + b \ln(r)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.6) ในขณะเดียวกัน ผลเฉลยแม่นยำตรงของการเคลื่อนตัวนั้นสามารถหาได้โดยทำการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ (3.4) ดังนี้

จากสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น (3.4)

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right] - (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr} = 0$$

อินทิเกรต: $\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = (1+\nu)\alpha T + c_1^*$

$$\frac{d(ru)}{dr} = (1+\nu)\alpha Tr + c_1^* r$$

อินทิเกรต: $ru = (1+\nu)\alpha \int_r^r Tr dr + \frac{c_1^*}{2} r^2 + c_2$

จัดรูปใหม่:

$$u(r) = \frac{(1+\nu)}{r} \alpha \int_r^r Tr dr + c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (3.36)$$

โดย $c_1 = c_1^*/2$, c_2 เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัวในสมการ (3.2) และ ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในสมการ (3.3) เมื่อแทนค่าการเคลื่อนตัว $u(r)$ จาก (3.36) จะได้

$$\sigma_r = \frac{-E\alpha}{r^2} \int_r^r Tr dr + \frac{E}{(1-\nu)} c_1 - \frac{E}{(1+\nu)} \frac{c_2}{r^2} \quad (3.37)$$

ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต:

เพื่อให้สอดคล้องกับตัวอย่างในการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่จะกล่าวถึงต่อไป เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้ คือ

$$\sigma_r (r=r_i) = 0 \quad (3.38)$$

$$\sigma_r (r=r_o) = 0 \quad (3.39)$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบเขต (3.38) และ (3.39) ลงในสมการ (3.37) สามารถหาค่าคงที่จากการอินทิเกรต c_1, c_2 ได้ เมื่อนำค่าคงที่ c_1, c_2 ที่คำนวณได้ และนำอุณหภูมิที่ถูกต้อง $T(r)$ จากสมการที่ (3.8) ไปแทนลงในสมการ (3.36) แล้วทำการอินทิเกรตและจัดรูปใหม่ จะได้ผลเฉลยแม่นยำตรงของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี เมื่อความดันภายในและภายนอกต่างเป็นศูนย์ ดังนี้

$$u(r) = \frac{\alpha}{r} \left[\frac{(1-\nu)r^2 + (1+\nu)r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_o} \left[\frac{\ln(r_i) T_o - \ln(r_o) T_i}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + \frac{(T_i - T_o)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \ln(r) \right] r dr \right. \\ \left. + (1+\nu) \int_{r_i}^r \left[\frac{\ln(r_i) T_o - \ln(r_o) T_i}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + \frac{(T_i - T_o)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \ln(r) \right] r dr \right] \quad (3.40)$$

รายละเอียดต่อไปนี้จะแสดงการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างโดยใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ซึ่งคือ โปรแกรม DISEXACT และโปรแกรม DISLNEAR เพื่อทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลเฉลยแม่นยำ โดยปัญหาตัวอย่างจะเป็นการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวในแนวรัศมีของแผ่นวงแหวนบาง ซึ่งมีคุณสมบัติต่างๆของวัสดุดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (α) = $11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง (ν) = 0.25

อุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น (T_{ref}) = 0°C

อุณหภูมิที่ผิวด้านในของวงแหวน (T_i) = 10°C

อุณหภูมิที่ผิวด้านนอกของวงแหวน (T_o) = 200°C

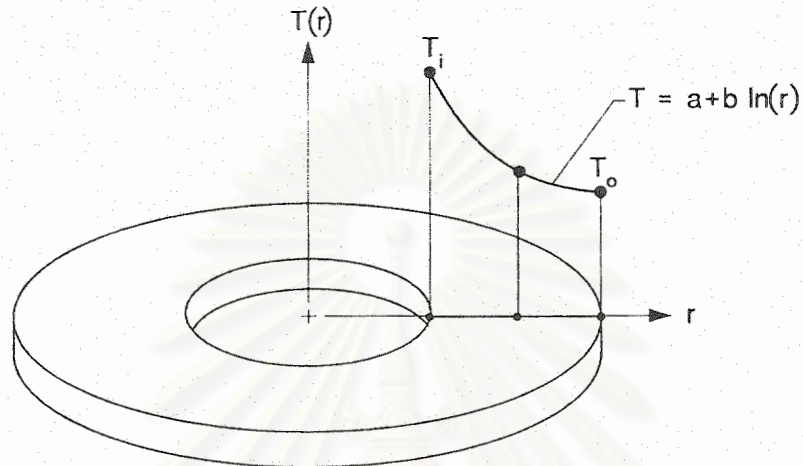
ความดันที่ผิวด้านในของวงแหวน (p_i) = 0 N/m^2

ความดันที่ผิวด้านนอกของวงแหวน (p_o) = 0 N/m^2

รัศมีภายในของแผ่นวงแหวน (r_i) = 0.30 m

รัศมีภายนอกของแผ่นวงแหวน (r_o) = 1 m

ตัวอย่างที่ 1 เป็นการใช้โปรแกรม DISEXACT ทำการคำนวณปัญหาตัวอย่างข้างต้น โดยจัดแบ่งแนวรัศมีเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ รูปที่ 3.6 แสดงแนวคิดในการจัดแบ่งเอลิเมนต์และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISEXACT



รูปที่ 3.6 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISEXACT

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม DISEXACT ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 1 ได้ตั้งชื่อว่า DISK1.DAT ซึ่งจะประกอบด้วยรายละเอียดดังรูปที่ 3.7

```

1
1-D ANNULAR DISC WITH RADIAL TEMPERATURE VARIATION
NELEM      NPOIN      NODALCONSTRAINT
  7          8          0
ALPHA      E          PR      TREF      PI      PO      TI      TO
11.7e-6    200e9     0.25     0.       0.     0.     10     200
NODE       R
  1        .3
  2        .4
  3        .5
  4        .6
  5        .7
  6        .8
  7        .9
  8        1.0

```

รูปที่ 3.7 ข้อมูลในไฟล์ชื่อ DISK1.DAT

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม DISEXACT โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูล เมื่อผู้ใช้ป้อนชื่อเข้าไปแล้ว โปรแกรมจะเริ่มทำการคำนวณเป็นขั้นเป็นตอนดังอธิบายในหัวข้อ 3.4 เมื่อโปรแกรมทำการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะให้ผู้ป้อนชื่อไฟล์ข้อมูลที่จะบรรจุผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวที่จุดต่อต่างๆ ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

```
*FINITE ELEMENT FOR SOLVING ANNULAR DISK WITH RADIAL TEMP VARIATION PROBLEM*
  WITH T(r) = a+b*ln(r)
```

```
PLEASE INPUT THE FILE NAME OF INPUT DATA
DISK1.DAT <ENTER>
```

```
*THE MODEL CONSISTS OF 8 NODES 7 ELEMENTS**
```

```
*ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND
  ASSEMBLE THEM TO SYSTEM EQUATION**
```

```
*APPLYING BOUNDARY CONDITION OF NODAL
  AND FORMING SET OF NEW MATRICES TO BE SOLVED**
```

```
*SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS**
  TOTAL OF 8 EQUATIONS TO BE SOLVED
```

```
PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISP. SOLUTION:
EXACT1.OUT <ENTER>
```

```
Stop - Program terminated
```

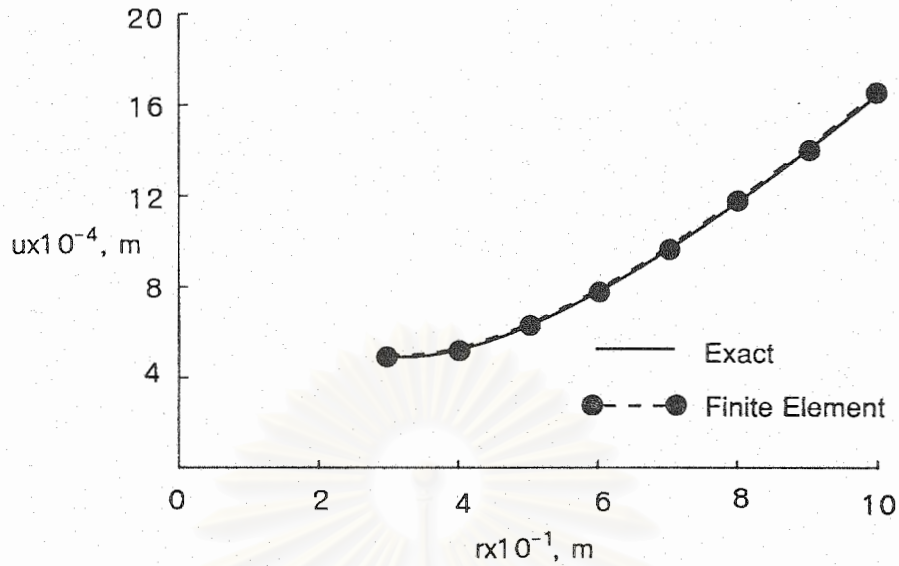
หลังจากทำการคำนวณเสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 1 มีชื่อว่า EXACT1.OUT ได้แสดงรายละเอียดดังรูปที่ 3.8

```
NODAL SOLUTION[ 8]
```

NODE	U
1	0.490999E-03
2	0.520271E-03
3	0.624505E-03
4	0.774876E-03
5	0.957658E-03
6	0.116516E-02
7	0.139258E-02
8	0.163666E-02

รูปที่ 3.8 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ EXACT1.OUT

ไฟล์ของผลลัพธ์ที่ได้ประกอบด้วย ค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละจุดต่อที่ตำแหน่งต่างๆตามแนวรัศมี ซึ่งเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการ (3.40) พบว่าผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT นี้มีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นยำตรง การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมได้แสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรง กับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมี ออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ

ตัวอย่างที่ 2 เป็นการวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างเดิม โดยใช้โปรแกรม DISEXACT เพื่อการคำนวณ แต่จะจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 1 เอลิเมนต์ 2 จุดต่อเท่านั้น โดยลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม DISEXACT ต้องการ ซึ่งสอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 2 ได้ตั้งชื่อว่า DISK2.DAT มีรายละเอียดดังรูปที่ 3.10

```

1
1-D ANNULAR DISC WITH RADIAL TEMPERATURE VARIATION
NELEM  NPOIN  NODALCONSTRAINT
  1      2      0
ALPHA  E      PR      TREF  PI      PO      TI      TO
11.7e-6 200e9  0.25  0.    0.    0.    10    200
NODE   R
  1    .3
  2    1.0

```

รูปที่ 3.10 ข้อมูลในไฟล์ชื่อ DISK2.DAT

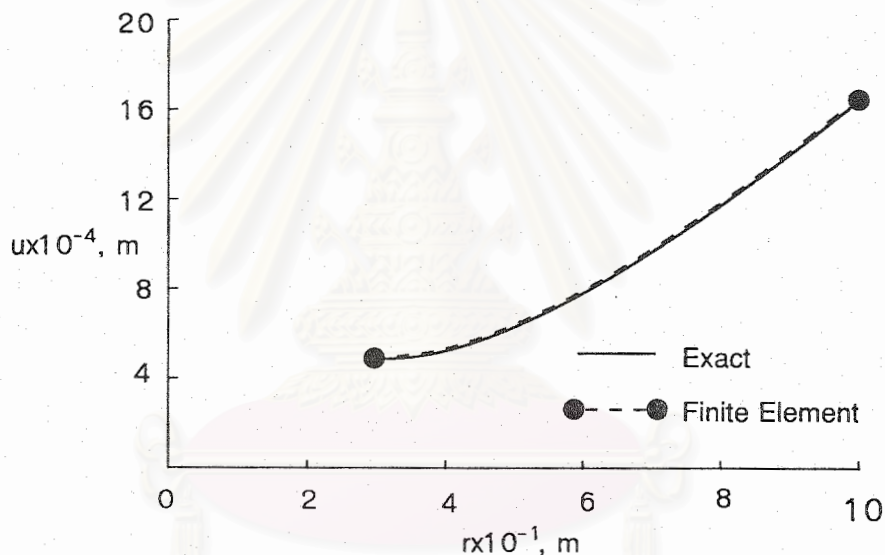
เมื่อทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม DISEXACT เสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 2 มีชื่อว่า EXACT2.OUT ซึ่งมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.11

NODAL SOLUTION[2]

NODE	U
1	0.490999E-03
2	0.163666E-02

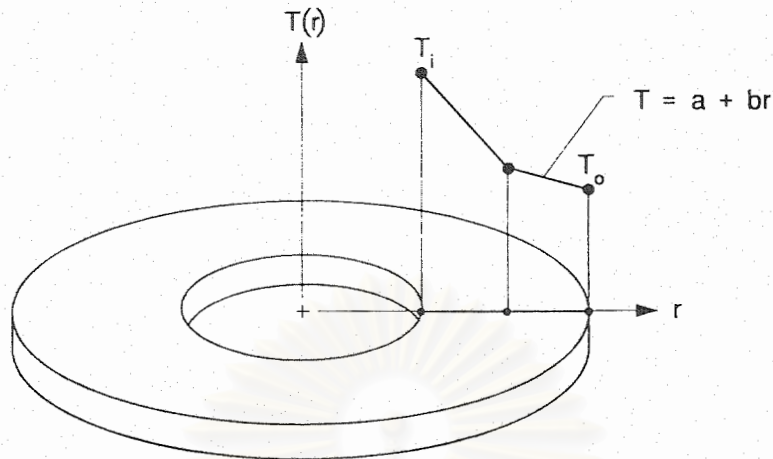
รูปที่ 3.11 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ EXACT2.OUT

ค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีของแต่ละจุดต่อในไฟล์ผลลัพธ์ EXACT2.OUT เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการ (3.40) พบว่าผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT ยังคงมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม โดยการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายใน (3.13) ได้แสดงในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISEXACT เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อ

ตัวอย่างที่ 3 เป็นการวิเคราะห์ปัญหาเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1 คือจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ เช่นเดียวกัน แต่ในตัวอย่างนี้จะทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม DISLNEAR ซึ่งใช้การประมาณภายในของอนุกรมและการเคลื่อนตัวที่ต่างเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรง เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ในตัวอย่างที่ 1 ซึ่งใช้โปรแกรม DISEXACT ที่มีฟังก์ชันประมาณภายในที่อยู่ในรูปแบบของผลเฉลยแม่นยำตรง โดยแนวคิดในการจัดแบ่งเอลิเมนต์และลักษณะการกระจายของอนุกรมภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISLNEAR แสดงได้ดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิภายในเอลิเมนต์ของโปรแกรม DISLNEAR

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรม DISLNEAR ต้องการเพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 3 นี้ ใช้ไฟล์ข้อมูล DISK1.DAT ในรูปที่ 3.7 เช่นเดียวกับโปรแกรม DISEXACT ในตัวอย่างที่ 1

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม DISLNEAR โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูล เมื่อผู้ใช้ป้อนชื่อเข้าไปแล้ว โปรแกรมจะเริ่มการคำนวณเป็นขั้นเป็นตอนเช่นเดียวกับโปรแกรม DISEXACT ดังอธิบายในหัวข้อ 3.4 เมื่อโปรแกรมทำการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะให้ผู้ใช้ป้อนชื่อไฟล์ข้อมูลที่จะบรรจุผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวที่จุดต่อต่างๆ โดยขั้นตอนต่างๆดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

```
*FINITE ELEMENT FOR SOLVING ANNULAR DISC WITH RADIAL TEMP VARIATION PROBLEM**
WITH LINEAR TEMP AND DISP INERPOLATION
```

```
PLEASE INPUT THE FILE NAME OF INPUT DATA:
DISK1.DAT <ENTER>
```

```
*THE MODEL CONDSISTS OF 8 NODES 7 ELEMENTS**
```

```
*ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND
ASSEMBLE THEM TO SYSTEM EQUATION**
```

```
*APPLYING BOUNDARY CONDITION OF NODAL
AND FORMING OF NEW MATRICES TO BE SOLVED**
```

```
*SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS**
```

```
PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISP. SOLUTION:
```

```
LINEAR1.OUT
```

```
Stop - Program terminated
```

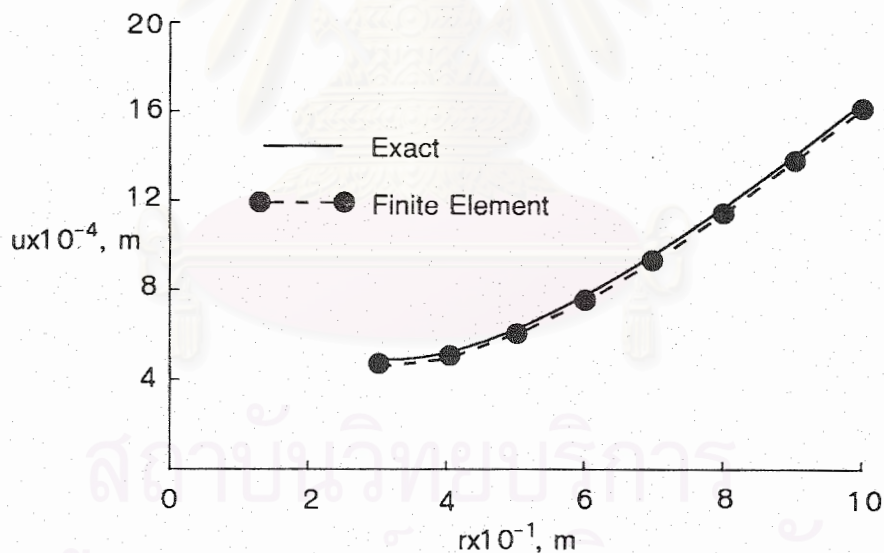
หลังจากโปรแกรม DISLINEAR ทำการคำนวณเสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างที่ 3 ให้ชื่อว่า LINEAR1.OUT ประกอบด้วยรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 3.14

NODAL SOLUTION[8]

NODE	U
1	0.488556E-03
2	0.514426E-03
3	0.617476E-03
4	0.767350E-03
5	0.949885E-03
6	0.115724E-02
7	0.138454E-02
8	0.162852E-02

รูปที่ 3.14 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ LINEAR1.OUT

ซึ่งค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีของแต่ละจุดต่อในไฟล์ผลลัพธ์ LINEAR1.OUT เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจากสมการ (3.40) พบว่าผลเฉลยได้มีความผิดพลาดเฉลี่ย 0.7% การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมได้แสดงในรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISLINEAR เมื่อมีการจัดแบ่งแนวรัศมีออกเป็น 7 เอลิเมนต์ และ 8 จุดต่อ

ตัวอย่างที่ 4 จะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 2 คือจัดแบ่งแนวรัศมีตัวอย่างออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อเท่านั้น แต่ในตัวอย่างที่ 4 นี้ จะทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม DISLINEAR แทน เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วย

โปรแกรมนี้ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้ในตัวอย่างที่ 2 ซึ่งใช้โปรแกรม DISEXACT ที่ให้ผลเฉลยแม่นยำ

สำหรับลักษณะของไฟล์ข้อมูลโปรแกรม DISLNEAR ต้องการ เพื่อให้สอดคล้องกับปัญหาในตัวอย่างที่ 4 นี้ จะใช้ไฟล์ข้อมูล DISK2.DAT ดังแสดงในรูปที่ 3.10 เช่นเดียวกับที่โปรแกรม DISEXACT ในตัวอย่างที่ 2 ต้องการ

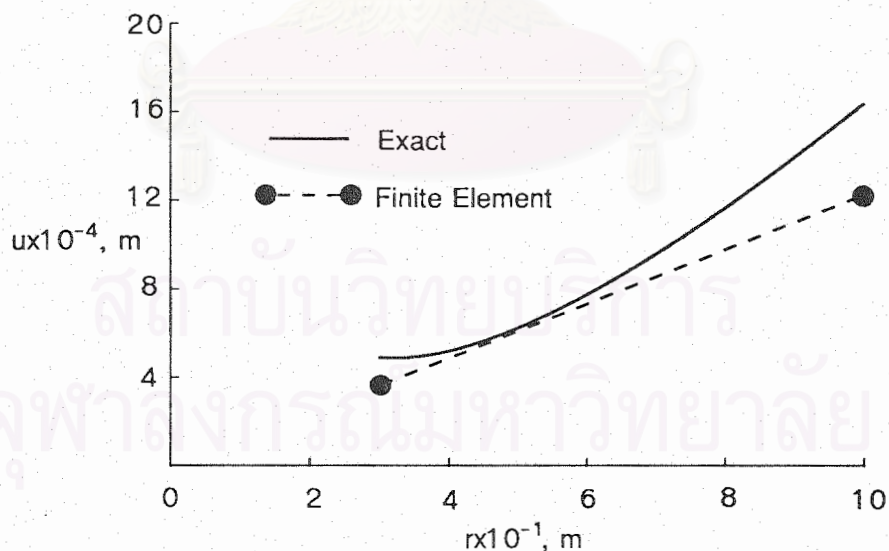
โดยเมื่อทำการคำนวณปัญหาในตัวอย่างที่ 4 โดยใช้โปรแกรม DISLNEAR เสร็จสมบูรณ์แล้ว ไฟล์ผลลัพธ์ของตัวอย่างนี้ได้ตั้งชื่อให้ว่า LINEAR2.OUT ซึ่งมีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 3.16

```

NODAL SOLUTION( 2)
      NODE          U
      1  0.368550E-03
      2  0.122850E-02
  
```

รูปที่ 3.16 ลักษณะผลลัพธ์ในไฟล์ LINEAR2.OUT

ลักษณะการเคลื่อนตัวในแนวนอนที่ได้จากไฟล์ผลลัพธ์ LINEAR2.OUT เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำจากสมการ (3.40) พบว่ามีความผิดพลาดถึง 25% การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมได้แสดงในรูปที่ 3.17



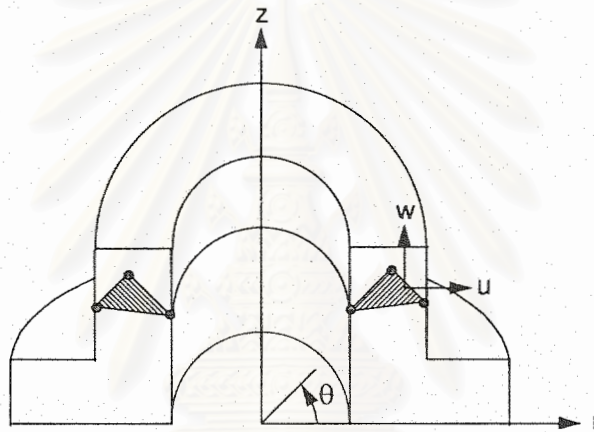
รูปที่ 3.17 การเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวในแนวนอนระหว่างผลเฉลยแม่นยำกับผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม DISLNEAR เมื่อมีการจัดแบ่งแนวนอนออกเป็น 1 เอลิเมนต์ และ 2 จุดต่อ

ตัวอย่างที่ 1 จนถึงตัวอย่างที่ 4 ได้แสดงให้เห็นว่า การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในที่เหมาะสมสามารถช่วยลดขนาดของหน่วยความจำอันเนื่องมาจากการแบ่งเอลิเมนต์ได้ โดยเฉพาะตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ซึ่งใช้ฟังก์ชันประมาณภายในที่เป็นผลเฉลยแม่นยำ สามารถให้ผลลัพธ์เท่ากับผลเฉลยแม่นยำได้แม้จะแบ่งปัญหาเป็นเพียง 1 เอลิเมนต์ก็ตาม ทั้งสองตัวอย่างนี้ยังแสดงให้เห็นว่าเอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมา Satisfies convergence criterion เนื่องจากจะใช้เพียง 1 เอลิเมนต์ (ดังแสดงในรูป 3.12) หรือหลายเอลิเมนต์ (ดังแสดงในรูป 3.9) ผลลัพธ์ของการการเคลื่อนตัวที่คำนวณได้ยังคงเป็นค่าแม่นยำ (exact solution) โดยไม่เกิดค่าความคลาดเคลื่อน (error) ใดๆทั้งสิ้นทั้งที่ตำแหน่งของจุดต่อ หรือตามตำแหน่งต่างๆตลอดแนวความยาวของเอลิเมนต์ เหตุผลที่ทำให้เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาสามารถให้ผลลัพธ์เป็นผลเฉลยแม่นยำนั้น เนื่องมาจากฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ได้ประดิษฐ์ (derived) โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ของปัญหา ดังนั้นค่าของเศษตกค้าง (Residuals) ดังแสดงในสมการ (3.14) นั้นจึงมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งต่างจากกรณีของไฟไนต์เอลิเมนต์แบบธรรมดาโดยทั่วไปดังเช่นที่ใช้ในตัวอย่างที่ 3 และตัวอย่างที่ 4 ในสองตัวอย่างหลังนี้ได้ใช้ฟังก์ชันประมาณภายในที่เป็นฟังก์ชันเส้นตรง ซึ่งการวิเคราะห์โดยส่วนใหญ่จะนิยมใช้ฟังก์ชันประมาณภายในเช่นนี้ เนื่องจากหากมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มากขึ้นเพียงพอแล้ว ก็สามารถให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำได้ และในทางปฏิบัติเนื่องจากการวิเคราะห์ในบทนี้ เป็นปัญหาในหนึ่งมิติ ซึ่งสามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้ จึงเลือกฟังก์ชันประมาณภายในจากผลเฉลยแม่นยำได้ แต่ปัญหาโดยทั่วไปหรือปัญหาที่จะกล่าวถึงในบทต่อไป จะเป็นปัญหาในสองมิติ ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้หรืออาจหาได้เพียงเฉพาะบางปัญหาเท่านั้น และหากรูปร่างชิ้นงานมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นแล้วก็จะไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้เลย ดังนั้นปัญหาของแข็งโดยทั่วไปจึงนิยมใช้ฟังก์ชันประมาณภายในให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเส้นตรงแล้วแบ่งเอลิเมนต์ให้มากเพียงพอ ก็สามารถให้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำอยู่ในระดับที่สามารถยอมรับได้ ผลการวิเคราะห์ดังอธิบายในบทนี้แสดงให้เห็นว่าการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ จะช่วยทุ่นเวลาในการคำนวณ และในขณะเดียวกัน สามารถเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้สูงขึ้นไปได้

บทที่ 4

การวิเคราะห์การเสีรูปและความเค้น สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน

ในการวิเคราะห์ปัญหาทางชนิดในงานวิศวกรรม ถึงแม้ว่าปัญหานั้นจะมีรูปร่างในสามมิติ แต่หากปัญหานั้นมีความสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric problem) ภายใต้แรงกระทำที่มีความสมมาตรเช่นกันก็สามารถแก้ปัญหาให้เป็นสองมิติได้ในระบบพิกัดทรงกระบอก ลักษณะของปัญหาเช่นนี้ แสดงได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ตัวอย่างปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนในระบบพิกัดทรงกระบอก

โดยในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน และขั้นตอนในการประดิษฐ์โปรแกรมซึ่งสอดคล้องกัน ตลอดจนยกตัวอย่างการคำนวณและการนำโปรแกรมไปประยุกต์ใช้

4.1 สมการเชิงอนุพันธ์

จากรูปที่ 4.1 รูปร่างของวัตถุมีความสมมาตรรอบแกน z และแรงภายนอกที่มากระทำหรืออุณหภูมิที่เกิดขึ้นไม่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง θ ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งในสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอกในสมการที่ (2.8) สามารถลดรูปมาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายความสมดุลของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนได้ดังนี้

$$\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + r \frac{\partial(\tau_{rz})}{\partial z} - \sigma_\theta + rf_r = 0 \quad (4.1g)$$

$$r \frac{\partial(\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + r f_z = 0 \quad (4.1ข)$$

4.2 เงื่อนไขขอบเขต

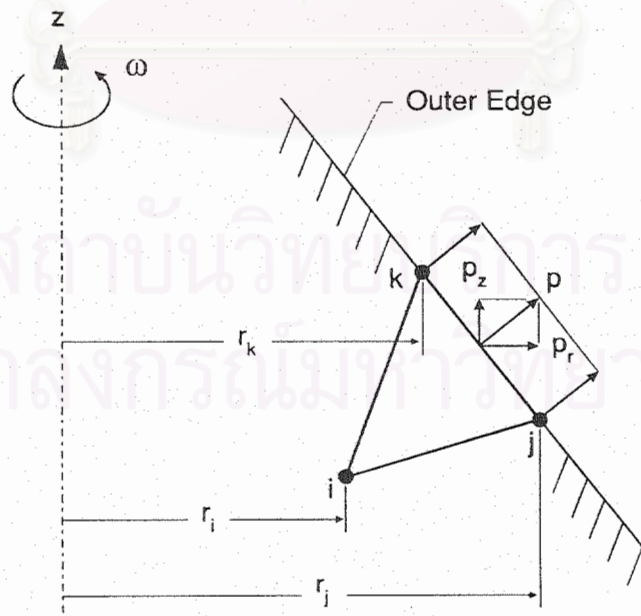
เงื่อนไขขอบเขตของการเคลื่อนตัวและความเค้นที่ผิวของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน สามารถลดรูปจากเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็งสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอกในหัวข้อ 2.2.2 ของบทที่ 2 ได้ดังนี้

4.2.1 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตค่าการเคลื่อนตัว เนื่องจากมีความสมมาตรรอบแกนจึงไม่เกิดการเคลื่อนตัวในแนวทิศ θ เป็นผลให้มีการกำหนดเพียงค่าการเคลื่อนตัว $u(r)$ และ $w(z)$ ในทิศทางรัศมี r และแกน z ตามลำดับเท่านั้น

4.2.2 การกำหนดความเค้นที่ผิว สามารถลดรูปจากสมการความเค้นที่ผิว (2.19) ในระบบพิกัดทรงกระบอกมาเป็น

$$\begin{Bmatrix} T_r \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{rz} \\ \tau_{rz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

โดย T_r และ T_z คือความเค้นที่ผิวในทิศแกน r และ z ตามลำดับ สำหรับปัญหาโดยส่วนใหญ่แล้วทั้งสองค่านี้หมายถึง ความดันที่กระทำกับผิววัตถุในทิศแกน r และ z ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ p_r และ p_z ตามลำดับ เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน ได้แสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน

4.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

4.3.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นประกอบไปด้วยขั้นตอนต่างๆในทำนองเดียวกันกับการวิเคราะห์ปัญหาหนึ่งมิติในบทที่ 3 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งลักษณะของเอลิเมนต์ที่ใช้ในปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนนี้ ผู้วิจัยได้เลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (Triangular element) ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 4.2

ขั้นตอนที่ 2 สมมติให้การกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของการเคลื่อนตัวภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมให้อยู่ในลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ (Flat plane) ซึ่งสามารถเขียนลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในรูปแบบของค่าที่จุดต่อ ได้ดังนี้

$$u(r, z) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (4.3)$$

$$w(r, z) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 \quad (4.4)$$

โดย u, w แทนการเคลื่อนตัวในทิศทาง r และ z ตามลำดับ และสำหรับฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์

$$N_i(r, z) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i r + c_i z) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

โดย A = พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งคำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2} [x_2(z_3 - z_1) + x_1(z_2 - z_3) + x_3(z_1 - z_2)] \quad (4.6)$$

และ

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2 & b_1 &= z_2 - z_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3 & b_2 &= z_3 - z_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1 & b_3 &= z_1 - z_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกัลเลอร์คิน เริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์ (4.1ก) ด้วยการคูณด้วยตัวถ่วงน้ำหนัก W_1 แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ จากนั้นให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นศูนย์ จะได้

$$\int_{\Omega} W_1 \left[\frac{\partial(r \sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \tau_{rz})}{\partial z} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W_1 (-\sigma_{\theta} + r f) d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

โดย Ω แทนขอบเขตของปริมาตร และ Γ แทนขอบเขตของพื้นผิว

สำหรับปัญหาสองมิติขึ้นไป การอินทิเกรตจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) กล่าวคือ

$$\int_{\Omega} u (\nabla \cdot \vec{v}) d\Omega = \int_{\Gamma} u (\vec{v} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \vec{v}) d\Omega \quad (4.9)$$

หากเปรียบเทียบสัญลักษณ์ของตัวแปรทางด้านซ้ายของสมการ (4.9) กับพจน์แรกของสมการ (4.8) พบว่า

$$\begin{aligned} u &= W_i \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial r} \hat{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \\ \vec{v} &= (r\sigma_r) \hat{i} + 0 \hat{j} + (r\tau_{rz}) \hat{k} \\ \text{และ} \quad \hat{n} &= n_r \hat{i} + n_\theta \hat{j} + n_z \hat{k} \end{aligned}$$

ทำการประยุกต์เข้ากับพจน์แรกของสมการ (4.8) จะได้

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} [W_i r (\sigma_r n_r + \tau_{rz} n_z)] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_i}{\partial r} (r\sigma_r) + \frac{\partial W_i}{\partial z} (r\tau_{rz}) \right] d\Omega \\ &- \int_{\Omega} W_i \sigma_\theta d\Omega + \int_{\Omega} W_i r f_z d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

แทนค่าสมการเงื่อนไขขอบเขตความเค้นที่ผิวจากสมการ (4.2) คือ $\sigma_r n_r + \tau_{rz} n_z = p_r$ ลงในสมการ (4.10) และแทน $N_i = W_i$ โดยวิธีการบับโนฟ-กัลเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) ในสมการ (4.11) จากนั้นทำการจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} r \frac{\partial N_1}{\partial r} & N_1 & r \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_2}{\partial r} & N_2 & r \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_3}{\partial r} & N_3 & r \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r p_r d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r f_z d\Omega \quad (4.11)$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นในสมการ (4.1ข) ทำการคูณด้วยตัวถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง W_i แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์จะได้

$$\int_{\Omega} W_i \left[\frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial (r\sigma_z)}{\partial z} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W_i r f_z d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

แล้วทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (4.9) เข้ากับพจน์แรกของสมการ (4.12) ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\int_{\Gamma} [W_i r (\tau_{rz} n_r + \sigma_z n_z)] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_i}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial W_i}{\partial z} (r \sigma_z) \right] d\Omega + \int_{\Omega} W_i r f_z d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

แทนค่าสมการเงื่อนไขขอบเขตความเค้นที่ผิวจากสมการ (4.2) คือ $\tau_{rz} n_r + \sigma_z n_z = p_z$ ลงในสมการ (4.13) และแทน $N_i = W_i$ โดยวิธีการบับโนฟ-กัลเลอร์คิน ลงในสมการ (4.13) แล้วจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ จะได้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} r \frac{\partial N_1}{\partial r} & r \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_2}{\partial r} & r \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ r \frac{\partial N_3}{\partial r} & r \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{rz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r p_z d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} r f_z d\Omega \quad (4.14)$$

รวมเมตริกซ์ในสมการ (4.11) และ เมตริกซ์ในสมการ (4.14) จัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์เดียวกัน จะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} \\ \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} \\ \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} d\Omega \quad (4.15)$$

เมตริกซ์ $\{\sigma\}$ จากด้านซ้ายของสมการ (4.15) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความเครียด โดยลดรูปจากสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของของแข็งใน 3 มิติ ในระบบพิกัดทรงกระบอก สมการที่ (2.9) ถึง (2.13) ได้ดังนี้

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon - \varepsilon_0\} \quad (4.16ก)$$

$$\text{โดย } \{\sigma\}^T = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}] \quad (4.16ข)$$

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.16ค)$$

$$\{\varepsilon_0\}^T = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0] \quad (4.16ง)$$

โดย $\Delta T = T(r, z) - T_0$ ซึ่ง T_0 คือ อุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น

ส่วนเมตริกซ์ของความเครียด $\{\varepsilon\}$ ในสมการที่ (4.16ก) นั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการเคลื่อนตัว โดยลดรูปจากสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัวของของแข็งในสามมิติ ในระบบพิกัดทรงกระบอก (2.14) ได้ดังนี้

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix} \quad (4.16จ)$$

$$\begin{aligned} \text{โดย } \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N] \{\delta\} \end{aligned} \quad (4.16ฉ)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

$$= [B(r, z)] \{\delta\} \quad (4.16\text{ข})$$

โดย ฟังก์ชันการประมาณภายใน N_i , $i = 1, 2, 3$ ได้แสดงไว้ในสมการ (4.5)

4.3.2 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

โดยการแทนค่าสมการ (4.16ก-ข) ลงในสมการ (4.15) จากนั้นแทน $d\Omega = d\theta dr dz$ สำหรับปริมาตร และ $d\Gamma = d\theta dz$ สำหรับพื้นผิวที่รับความดัน จะได้

$$\int_{\Omega} r [B]^T [C] [B] \{\delta\} d\theta dr dz = \int_{\Gamma} r [N]^T \{p\} d\theta dz + \int_{\Omega} r [N]^T \{f\} d\theta dr dz$$

$$+ \int_{\Omega} r [B]^T [C] \{\epsilon_0\} d\theta dr dz \quad (4.17)$$

จัดรูปไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเพื่อการประดิษฐ์โปรแกรมได้

$$[K]_e \{\delta\} = \{P\}_e + \{F_b\}_e + \{F_0\}_e \quad (4.18)$$

แยกพิจารณาแต่ละพจน์ของสมการ (4.18) เพื่อความเข้าใจในเอลิเมนต์เมตริกซ์ของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน เริ่มจากเมตริกซ์ด้านซ้ายของสมการ (4.18)

$$[K]_e = 2\pi \int_{\Gamma} [B]^T [C] [B] r dr dz$$

เพื่อการอินทิเกรตได้โดยง่าย จึงคำนวณเมตริกซ์ $[B]$ จากค่าเฉลี่ย \bar{r} , \bar{z} ซึ่งคิดเป็นค่าคงที่ของแต่ละเอลิเมนต์

$$r = \bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3} \quad \text{และ} \quad z = \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3} \quad (4.19)$$

$$[B(\bar{r}, \bar{z})] = [\bar{B}]$$

ดังนั้นจะได้ค่าประมาณของเมตริกซ์ $[K]_e$ เป็นดังนี้

$$[K]_e = 2\pi \bar{r} A [\bar{B}]^T [C] [\bar{B}] \quad (4.20)$$

พิจารณาเมตริกซ์แรกทางด้านขวาของสมการ (4.18)

$$\{P\}_e = 2\pi \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} r dz$$

การประดิษฐ์เมตริกซ์ $\{P\}_e$ สำหรับเอลิเมนต์ที่รับโหลดความดัน ดังแสดงในรูป 4.2 นั้น เนื่องจากลักษณะเอลิเมนต์จะมีด้านของเอลิเมนต์เป็นด้านประกอบของผิววัตถุ ซึ่งมีความดันกระทำกับพื้นผิว ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.2 มีด้านที่รับแรงดันคือ ด้าน jk โหลดเวกเตอร์ที่เกิดขึ้นสามารถเขียนแยกเป็นโหลดที่กระทำกับจุดต่อ j และ k ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของโหลดความดันที่กระทำกับด้าน jk ดังตัวอย่างการหาเมตริกซ์ $\{P\}_e$ สำหรับเอลิเมนต์ตัวอย่างในรูป 4.2 จะได้ดังนี้

$$\{p_j\} = \{p_k\} = \frac{2\pi\bar{r}(z_k - z_j)}{2} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix}$$

โดย $\bar{r} = \frac{r_k + r_j}{2}$ ทำให้เมตริกซ์ $\{P\}_e$ ของเอลิเมนต์ในรูป 4.2 คือ

$$\{P\}_e = \frac{2\pi\bar{r}(z_k - z_j)}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_r \\ p_r \\ p_z \\ p_z \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ไม่มีด้านใดรับความดันเลย เมตริกซ์ $\{P\}_e$ จะมีค่าเป็นศูนย์ หากพิจารณาเมตริกซ์ที่สองด้านขวามือของสมการ (4.18) ซึ่งคือ

$$\{F_b\}_e = 2\pi \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} r dr dz$$

เพื่อการอินทิเกรตโดยง่ายเช่นเดียวกับการหาเมตริกซ์ $[K]_e$ จึงแทน r ด้วย \bar{r} และสำหรับการอินทิเกรต $\int_{\Gamma} N_i d\Gamma = \frac{A}{3}$ จากสมการ (4.19) จะได้

$$\{F_b\}_e = \frac{2\pi\bar{r}A}{3} \begin{Bmatrix} \bar{f}_r \\ \bar{f}_z \\ \bar{f}_r \\ \bar{f}_r \\ \bar{f}_z \\ \bar{f}_z \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

แรงเหวี่ยงรอบตัวเองของเอลิเมนต์โดยเฉลี่ย $\bar{f}_r = \rho \omega^2 \bar{r}$ โดย ω แทนแรงเหวี่ยงรอบตัวเองมีหน่วยเป็น rad/s และ \bar{f}_z แทนแรงวัตถุในแนวแกน z ได้แก่ แรงเนื่องจากน้ำหนักวัตถุ

ส่วนเมตริกซ์สุดท้ายทางด้านขวาของสมการ (4.18) จะได้

$$\{F_0\}_e = 2\pi \int_{\Gamma} [B]^T [C] \alpha (T(r, z) - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} r \, dr \, dz$$

ใช้ค่าเฉลี่ยของ r และ $[B]$ ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\{F_0\}_e = 2\pi \bar{r} A [\bar{B}]^T [C] \alpha (T(r, z) - T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

4.4 ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 4.3 ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน โดยให้โปรแกรมนี้นี้ชื่อว่า AXISSYM ซึ่งมีเนื้อหาประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM] และอีก 5 โปรแกรมย่อย [SUBROUTINE PROGRAM] ทำงานตามขั้นตอนดังนี้

4.4.1 การทำงานเริ่มจากอ่านข้อมูลของปัญหา ได้แก่ จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ คุณสมบัติต่างๆของวัสดุ และค่าโคออดิเนตของจุดต่อ หมายเลขของจุดต่อที่ประกอบกันเป็นเอลิเมนต์ อยู่ในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM]

4.4.2 คำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ละเอลิเมนต์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (4.18) โดยเรียกโปรแกรมย่อย AXIS [SUBROUTINE AXIS] จากนั้นส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ได้จากโปรแกรมย่อย AXIS ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวม โดยเรียกโปรแกรมย่อย ASSMBLE [SUBROUTINE ASSMBLE]

4.4.3 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่นบางจุดต่อจะถูกตรึงให้เคลื่อนที่ไปในแนวรัศมีหรือในแนวแกน z ไม่ได้ บางจุดต่อจะมีแรงภายนอกต่างๆมากระทำ โดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC [SUBROUTINE APPLYBC]

4.4.4 เรียกโปรแกรมย่อย SOLVE [SUBROUTINE SOLVE] เพื่อแก้ระบบสมการรวม เพื่อหาค่าการเคลื่อนตัว $u(r)$ ในทิศทางรัศมี r และการเคลื่อนตัว $w(z)$ ในทิศทางตามแกน z ที่ทุกจุดต่อ

4.4.5 คำนวณค่าความเค้น $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ ของทุกเอลิเมนต์ และแปลงเป็นค่าความเค้นของทุกจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย STRESS [SUBROUTINE STRESS]

4.4.6 พิมพ์คำตอบของค่าเคลื่อนตัว u และ w ของทุกจุดต่อ ความเค้นของทุกเอลิเมนต์ และความเค้นของทุกจุดต่อ ลงในไฟล์ที่ต้องการ

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม AXISSYM สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบภูมิการทำงานดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ AXISSYM

4.5 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรม AXISSYM ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

4.6 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ

4.6.1 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม AXISSYM ต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 9 ส่วนย่อยดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์
 บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษรอธิบายลักษณะ
 ของไฟล์
 บรรทัดต่อไป ประโยคอธิบายลักษณะของไฟล์ ซึ่งมีจำนวนบรรทัดเท่า
 ที่ระบุไว้ในบรรทัดแรก
 ตัวอย่างเช่น 3
 Input data for axisymmetric problem
 Loads include centrifugal force and pressure on two
 sides

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา
 บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อ เอลิเมนต์ แรงภายนอก และ
 จำนวนกลุ่มของด้านที่รับความดัน
 บรรทัดที่ 2 ตัวเลขจำนวนจุดต่อ เอลิเมนต์ แรงภายนอก และ
 จำนวนกลุ่มของด้านที่รับความดัน
 ตัวอย่างเช่น NPOIN NELEM NFORCE NSPRESSURE
 781 1400 0 2
 หมายเหตุ: จำนวนกลุ่มของด้านที่รับความดันสำหรับโปรแกรม
 AXISSYM ระบุค่าได้ถึงหมายเลข 2 ซึ่งเพียงพอ
 สำหรับทุกปัญหา เนื่องจากหากแบ่งขอบเขตปัญหา
 ออกเป็นเอลิเมนต์ตั้งแต่ 2 เอลิเมนต์ขึ้นไปแล้ว เอลิ
 เมนต์หนึ่งๆจะมีด้านซึ่งสามารถรับความดันได้อย่าง
 มากที่สุดเพียง 2 ด้านเท่านั้น

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่างๆของปัญหา
 บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่างๆ
 บรรทัดที่ 2 ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น อัตราส่วน
 ปัวส์ซอง, ความหนาแน่นของวัสดุ สัมประสิทธิ์การขยาย
 ตัวเนื่องจากอุณหภูมิ ระดับอุณหภูมิที่ไม่มีความเค้น
 อัตราเร็วเชิงมุมรอบแกน z ความเร่งของแรงดึงดูดโลก
 ตัวอย่างเช่น

ELAS	POISSON	DENSITY	ALPHA	TREF	ANGVEL	GRAV(gravity acc.)
200.E9	0.343	7800.	11.7E-6	0.	0.	0.

ส่วนที่ 4 ตำแหน่งของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อตำแหน่งของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ระยะทางแกน r ของจุดต่อ ระยะทางแกน z ของจุดต่อ

ตัวอย่างเช่น NODAL COORDINATES:

1	0.2	0
2	0.5	4.1
:	:	:
:	:	:
781	1.5	2.0

ส่วนที่ 5 อุณหภูมิของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้ออุณหภูมิของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ตัวเลขแสดงอุณหภูมิของจุดต่อนั้นๆ

ตัวอย่างเช่น NODAL TEMPERATURE LOAD

1	200
2	210
:	:
:	:
781	300

ส่วนที่ 6 เงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป รหัสอักษร 8 ตัว ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ รหัสตัวเลขแสดงเงื่อนไขขอบเขตการเคลื่อนตัวของจุดต่อนั้นๆ

ตัวอย่างเช่น NODAL CONSTRAINTS:

SPCCONST	1	1
SPCCONST	5	3
SPCCONST	600	13
ENDCONST	0	0

หมายเหตุ: รหัสอักษร 8 ตัว SPCCONST เป็นรหัสอักษรหน้าจุดต่อที่มีการจับยึด
 หลังจากระบุจุดต่อที่มีการจับยึดจนครบแล้ว จะมีการปิดท้ายอีกบรรทัดด้วยรหัสอักษร 8 ตัว ENDCONST ตามด้วย ตัวเลข 0 อีกสองตัวที่ตรงกับช่องหมายเลขของจุดต่อ และช่องรหัสตัวเลขแสดงเงื่อนไข ตามลำดับ

ส่วนรหัสตัวเลข

- 1 หมายถึง จุดต่อนั้นถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่เฉพาะในทิศทางแกน r
- 3 หมายถึง จุดต่อนั้นถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่เฉพาะในทิศทางแกน z
- 13 หมายถึง จุดต่อนั้นถูกตรึงอยู่กับที่

ส่วนที่ 7 ลักษณะการวนจุดต่อของเอลิเมนต์:

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อการวนจุดต่อของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขของจุดต่อทั้งสามในทิศทวนเข็มนาฬิกา ที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น

ตัวอย่างเช่น ELEMENT NODAL CONNECTIONS:

1	10	13	15
2	15	18	23
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
1400	780	769	748

ส่วนที่ 8 ความดันภายนอกที่มากกระทำกับด้านต่างๆของวัตถุ

บรรทัดแรก คำระบุกลุ่มของความดัน

บรรทัดที่สอง คำระบุเอลิเมนต์ คำระบุความดันในทิศแกน r และแกน z คำระบุหมายเลขของจุดต่อของเอลิเมนต์ที่เชื่อมกันเป็นด้านที่รับความดัน

บรรทัดต่อไป รหัสอักษร 8 ตัว ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์ซึ่งรับความดัน ค่าความดันที่กระทำกับเอลิเมนต์ในทิศแกน r ค่าความดันที่กระทำกับเอลิเมนต์ในทิศแกน z หมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์ที่เชื่อมกันเป็นด้านที่รับความดัน

ตัวอย่างเช่น SURFACE PRESSURE GROUP 1:

	No.Elem	PR	PZ	NODE1	NODE2
PRESSURE	20	-2E6	0.	80	79
PRESSURE	41	-2E6	0.	79	78
PRESSURE	45	-2E6	0.	78	77
ENDGROUP	0	0	0	0	0

SURFACE PRESSURE GROUP 2:

	No.Elem	PR	PZ	NODE1	NODE2
PRESSURE	1385	1E6	0.	159	160
PRESSURE	1400	1E6	0.	160	1
ENDGROUP	0	0	0	0	0

หมายเหตุ: รหัสอักษร 8 ตัว PRESSURE เป็นรหัสอักษรหน้าบรรทัดของเอลิเมนต์ที่รับความดัน
 รหัสอักษร 8 ตัว ENDFGROUP ตามด้วยเลขศูนย์อีก 5 ตัว จะวางไว้บรรทัดสุดท้ายของแต่ละกลุ่มของความดัน เพื่อเป็นการแสดงว่าสิ้นสุดของกลุ่มความดัน ณ ด้านนั้นของชิ้นงานแล้ว

ส่วนที่ 9 แรงภายนอกที่มากระทำกับจุดต่อต่างๆ
 บรรทัดแรก ค่าระบุหัวข้อแรงภายนอกที่มากระทำกับจุดต่อ
 บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ตัวเลขแสดงค่าของแรงที่กระทำกับจุดต่อนั้นในแนวแกน r ตัวเลขแสดงค่าของแรงที่กระทำกับจุดต่อนั้นในแนวแกน z

ตัวอย่างเช่น	NODAL	FORCES
	1	100 -500
	4	90 -350

ดังแสดงตัวอย่างลักษณะไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม AXISSYM ต้องการ แสดงได้ดังรูปที่

4.4

```

2
Finite element to solve axisymmetric problem
Operating with thermal, pressure load and nodal, body force
NPOIN  NELEM  NFORCE  NEPRESSURE
4      2      1      2
ELAS    POISSON  DENSITY  ALPHA  TREF.  ANGVEL  GRAV(gravity acc.)
200e9  0.3      7800     11E-6  0.     52.36  9.81
NODAL COORDINATE:
1      .04     .01
2      .04     0.
3      .06     0.
4      .06     .01
NODAL TEMPERATURE LOAD:
1      0.
2      0.
3      0.
4      0.
NODAL CONSTRAINTS:
SPCCONST  1      3
SPCCONST  2      3
SPCCONST  3     13
SPCCONST  4     13
ENDCONST  0      0
ELEMENT NODAL CONNECTIONS:
1      1      2      4
2      2      3      4
SURFACE PRESSURE GROUP1
NO.ELEM.  PR      PZ      NODE1  NODE2
PRESSURE  1     2E6    0.      1      2
ENDGROUP  0      0      0      0      0
SURFACE PRESSURE GROUP2
NO.ELEM.  PR      PZ      NODE1  NODE2
PRESSURE  1     1E6    0.      1      2
ENDGROUP  0      0      0      0      0
NODAL FORCE:
4      2514      0.

```

รูปที่ 4.4 รูปแบบของไฟล์ข้อมูลตัวอย่างที่โปรแกรม AXISSYM ต้องการ และตัวอย่างไฟล์ผลลัพธ์ ซึ่งได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม AXISSYM ได้แสดงดังรูปที่

4.5

```

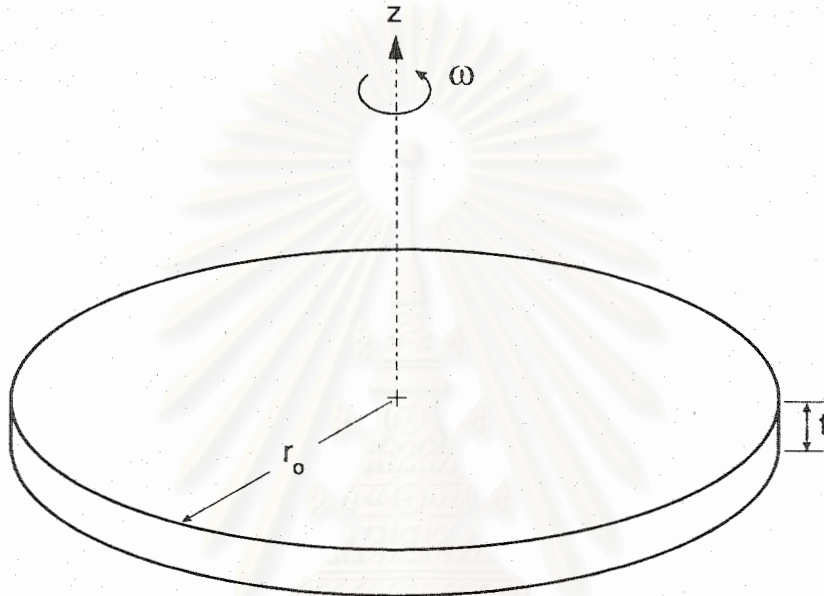
THE FINITE ELEMENT MODEL
CONSISTS OF 4 NODES AND 2 ELEMENTS
AND HALF BAND WIDTH OF 8
NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [ 4]:
NODE      U      W
1      0.1402184E-06  0.0000000E+00
2      0.1337522E-06  0.0000000E+00
3      0.0000000E+00  0.0000000E+00
4      0.0000000E+00  0.0000000E+00
ELEMENTAL STRESS SOLUTIONS [ 2]:
ELEM      SRR      SZZ      SOO      SRZ
1  -0.166176E+07  -0.583153E+06  -0.282086E+06  0.497404E+05
2  -0.170405E+07  -0.675191E+06  -0.546583E+06  0.000000E+00
NODAL STRESS SOLUTIONS [ 4]:
NODE      SRR      SZZ      SOO      SRZ
1  -0.166176E+07  -0.583153E+06  -0.282086E+06  0.497404E+05
2  -0.168291E+07  -0.629172E+06  -0.414335E+06  0.248702E+05
3  -0.170405E+07  -0.675191E+06  -0.546583E+06  0.000000E+00
4  -0.168291E+07  -0.629172E+06  -0.414335E+06  0.248702E+05
ELEMENT NODAL CONNECTION
ELE      I      J      K
1      1      2      4
2      2      3      4

```

รูปที่ 4.5 รูปแบบของไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม AXISSYM

4.7 ตัวอย่างและการนำไปประยุกต์ใช้

4.7.1 การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω rad/s ลักษณะของปัญหาได้แสดงดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 แผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง
ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω rad/s

ปัญหาเช่นนี้สามารถหาผลเฉลยแน่นอนตรงได้โดยตั้งสมมุติฐานว่าเป็นแผ่นกลมบางที่มีความหนาคงที่ ซึ่งผลในแนวแกน z นั้นละทิ้งได้ และเป็นปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน ทำให้สมการแสดงความสมดุลของของแข็งในสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอก (2.8) ลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (4.24)$$

โดยการแทนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (2.10) และความเครียดกับการเคลื่อนตัว (2.13) ที่ลดรูปจากของแข็งสามมิติในระบบพิกัดทรงกระบอก ลงในสมการ (4.24) จะได้

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -(1-\nu^2) \rho\omega^2 r/E \quad (4.25)$$

$$\text{แก้สมการหาคำตอบในรูปฟังก์ชันของ } u(r) = \frac{-\rho\omega^2 r^3(1-v^2)}{8E} + c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (4.26)$$

จากนั้น แทน $u(r)$ ลงในความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว และความเค้นกับความเครียด จะได้

$$\sigma_r = \frac{E}{1-v^2} \left[\frac{-(3+v)(1-v^2)\rho\omega^2 r^2}{8E} + (1+v)c_1 - (1-v)\frac{c_2}{r^2} \right] \quad (4.27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-v^2} \left[\frac{-(1+3v)(1-v^2)\rho\omega^2 r^2}{8E} + (1+v)c_1 + (1-v)\frac{c_2}{r^2} \right] \quad (4.28)$$

โดย c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ หาได้โดยการใส่เงื่อนไขขอบเขต

$$(\sigma_r)_{r=r_0} = 0, \quad (u)_{r=0} = 0$$

ลงใน สมการ (4.27) และ (4.26) ตามลำดับ แล้วแก้สมการหาค่า c_1, c_2 ทำให้ได้ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω rad/s ดังนี้

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+v}{8} (r_0^2 - r^2) \rho\omega^2 \\ \sigma_\theta &= \frac{3+v}{8} \left(r_0^2 - \frac{1+3v}{3+v} r^2 \right) \rho\omega^2 \\ u &= \frac{1-v}{8E} \left[(3+v)r_0^2 - (1+v)r^2 \right] \rho\omega^2 r \end{aligned} \quad (4.29)$$

ต่อไปเป็นการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ดังแสดงในรูป 4.6 โดยใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น คือโปรแกรม AXISSYM เพื่อทำการเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในสมการ (4.29) โดยแผ่นกลมตันบางที่ใช้ในการวิเคราะห์ก็มีคุณสมบัติดังนี้

$$\text{ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน } (\alpha) = 11.7 \times 10^{-6} \text{ } / ^\circ\text{C}$$

$$\text{ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซอง } (\nu) = 0.29$$

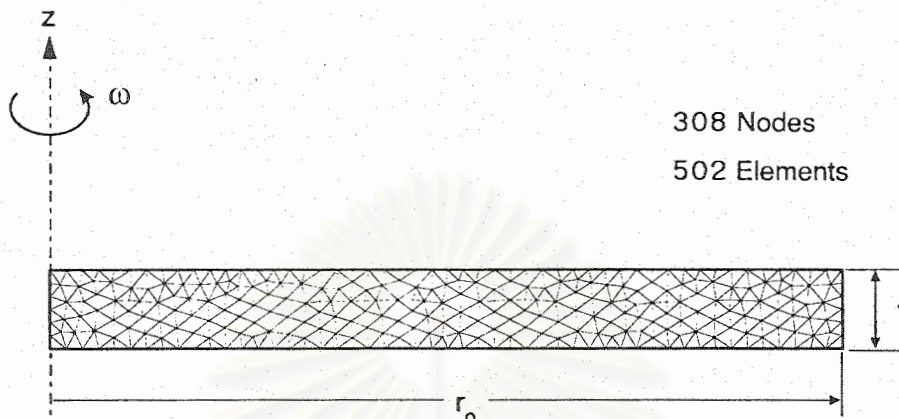
$$\text{ค่าความหนาแน่นของวัสดุ } (\rho) = 7800 \text{ Kg/m}^3$$

$$\text{ค่า Young's Modulus ของความยืดหยุ่น } (E) = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\text{ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น } (T_0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{ความเร็วเชิงมุม } (\omega) = 52.36 \text{ rad/s}$$

รายละเอียดต่อไปนี้จะแสดงการใช้โปรแกรม AXISSYM เพื่อคำนวณปัญหาข้างต้น โดยจัดแบ่งปัญหาออกเป็น 308 จุดต่อ 502 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นกลมตันบางในรูปที่ 4.6

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม AXISSYM โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูล โดยเมื่อผู้ใช้ป้อนชื่อเข้าไปแล้วโปรแกรมจะเริ่มคำนวณอย่างเป็นขั้นเป็นตอนดังอธิบายในหัวข้อ 4.4 เมื่อโปรแกรมคำนวณสิ้นสุดลงโปรแกรมจะให้ผู้ใช้ป้อนชื่อไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังนี้

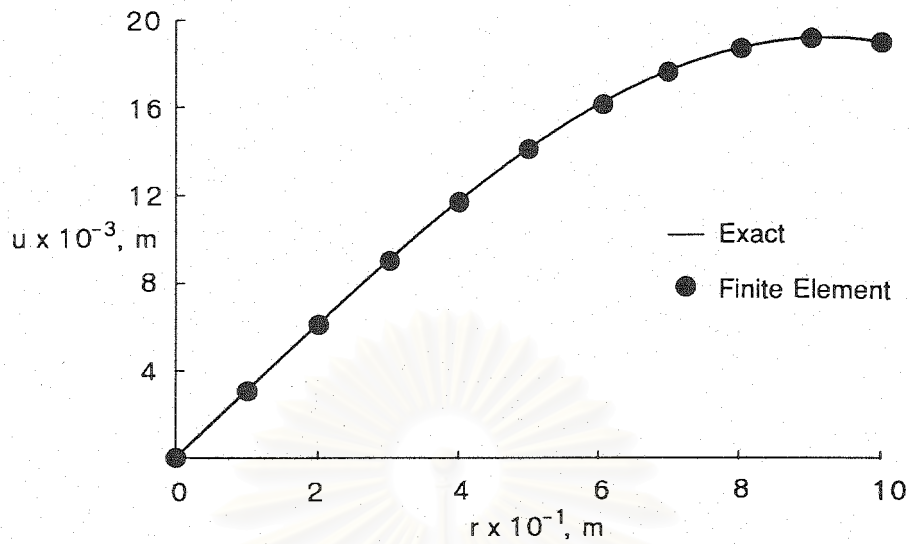
```
*FINITE ELEMNT FOR SOLVING AXISSYMMETRIC PROBLEM**
WITH PRESSURE TEMPERATURE AND CONSTANT ANGULAR VELOCITY
PLEASE INPUT THE FILE NAME
SOLIDCEN.DAT <ENTER>

***THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF 308 NODES 502 ELEMENTS***
***ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS***
***APPLYING BOUNDARY CONDITIONS***
***SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS**
(TOTAL OF 308 EQUATIONS WITH HALF BANDWIDTH OF 408)

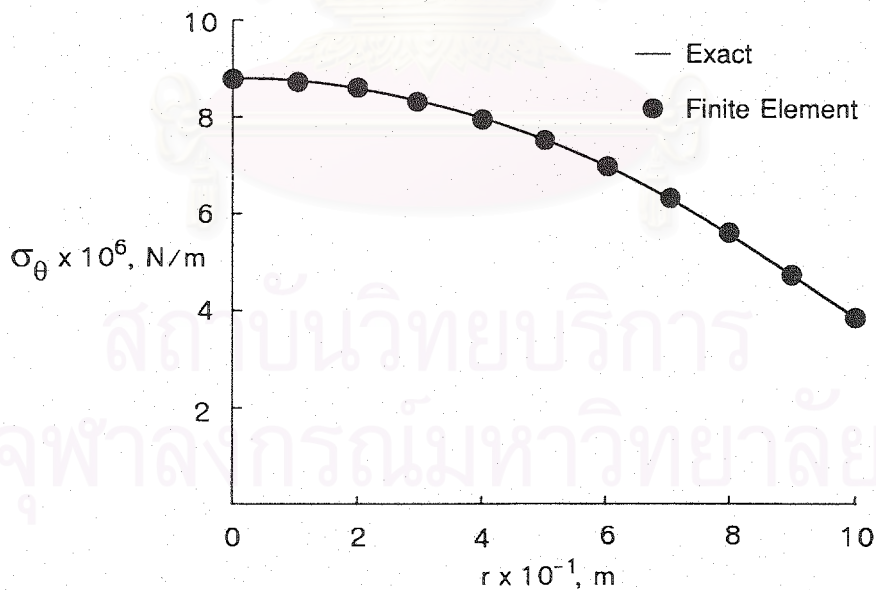
PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT AND STRESS SOLUTIONS:
SOLIDCEN.OUT <ENTER>

Stop - Program terminated
```

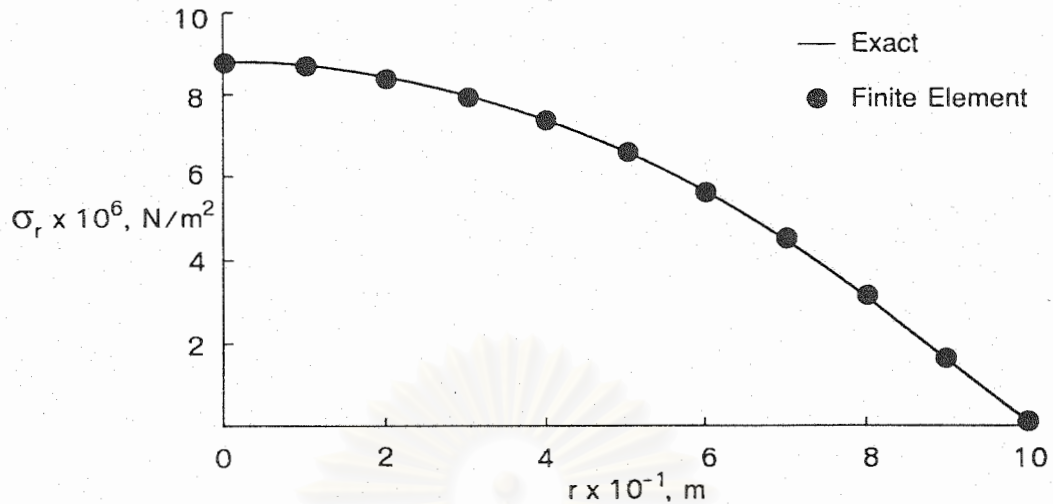
โดยไฟล์ของผลลัพธ์ที่ได้ของแผ่นกลมตันบางในรูปที่ 4.7 เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากการคำนวณในสมการที่ (4.29) การเคลื่อนตัวในแนวรัศมีได้เปรียบเทียบกับแสดงในกราฟรูปที่ 4.8 ความเค้นในแนวสัมผัสได้เปรียบเทียบกับแสดงในรูปที่ 4.9 และความเค้นในแนวรัศมีได้เปรียบเทียบกับแสดงในรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นกลมตันบาง ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่



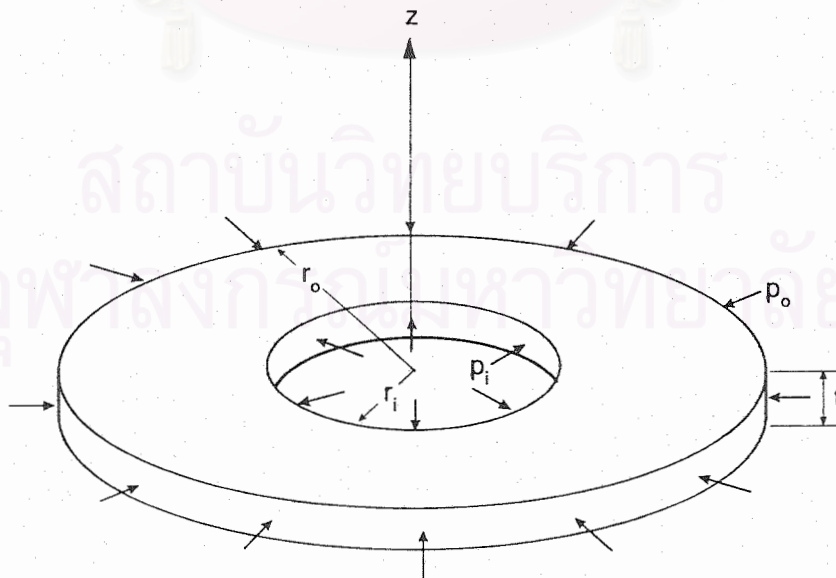
รูปที่ 4.9 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวสัมผัส ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นกลมตันบาง ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่



รูปที่ 4.10 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวรัศมี ระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นกลมตันบางภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่

ความผิดพลาด (Error) ของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากโปรแกรม AXISSYM เมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำสมการ (4.29) ประกอบด้วยความผิดพลาดของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมี 0.055% ความเค้นในแนวสัมผัส 0.02% และความเค้นในแนวรัศมี 0.003% ตามลำดับ

4.7.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นกับแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันกระทำที่ผิวภายในและภายนอกของวงแหวน ลักษณะของปัญหาได้แสดงในรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 แผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o

ปัญหานี้ สามารถหาผลเฉลยแน่นอนตรงได้เช่นกัน โดยมีสมมุติฐานเช่นเดียวกับตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 ทำให้ได้สมการความสมดุลเช่นเดียวกับสมการ (4.25) และแก้สมการหาค่าตอบในรูปฟังก์ชันของ $u(r)$ ได้ดังสมการ (4.26) และหลังจากแปลง $u(r)$ ให้อยู่ในรูปของ σ_r และ σ_θ ก็จะได้สมการเช่นเดียวกับสมการ (4.27) และ (4.28) ตามลำดับ แต่สำหรับตัวอย่างนี้ไม่มีแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ดังนั้นพจน์ต่างๆในสมการดังกล่าวที่เกี่ยวข้องกับ ω จึงเป็นศูนย์

เงื่อนไขขอบเขต เพื่อหาค่าคงที่ สำหรับตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.2 นี้ คือ

$$\left(\sigma_r\right)_{r=r_i} = -p_i \quad \text{และ} \quad \left(\sigma_r\right)_{r=r_o} = -p_o$$

ทำการแก้สมการค่าคงที่ c_1, c_2 ในทำนองเดียวกับตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 ก่อให้เกิดผลเฉลยแน่นอนตรงของปัญหาแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o ดังนี้

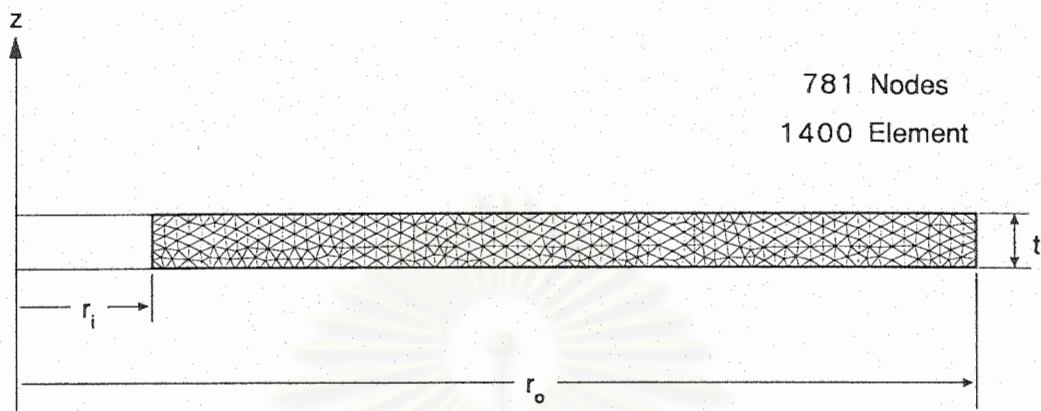
$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{r_i^2 p_i - r_o^2 p_o}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r^2} \\ u &= \frac{1 - \nu}{E} \frac{(r_i^2 p_i - r_o^2 p_o) r}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{1 + \nu}{E} \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{(r_o^2 - r_i^2) r} \end{aligned} \quad (4.30)$$

เปรียบเทียบการวิเคราะห์ปัญหาดังรูปที่ 4.11 ดังกล่าว ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ AXISSYM โดยแผ่นวงแหวนบางที่จะวิเคราะห์มีคุณสมบัติดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน	$(\alpha) = 11.7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$
ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง	$(\nu) = 0.343$
ค่าความหนาแน่นของวัสดุ	$(\rho) = 7800 \text{ Kg/m}^3$
ค่า Young's Modulus ของความยืดหยุ่น	$(E) = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น	$(T_o) = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$
ความดันที่กระทำกับผิวภายในวงแหวน	$(p_i) = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
ความดันที่กระทำกับผิวภายนอกวงแหวน	$(p_o) = -2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

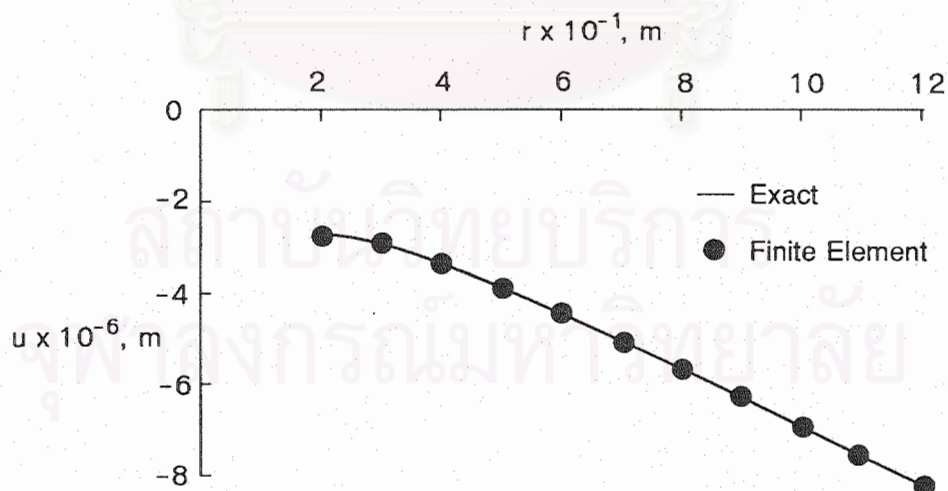
หมายเหตุ: เครื่องหมายของความดันที่แทนลงในโปรแกรม มีทิศเป็นบวกหรือลบตามที่สเกลเตอร์ของความดันนั้น

จากนั้นใช้โปรแกรม AXISSYM คำนวณปัญหาดังกล่าว โดยจัดแบ่งปัญหาออกเป็น 781 จุดต่อ 1400 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.12

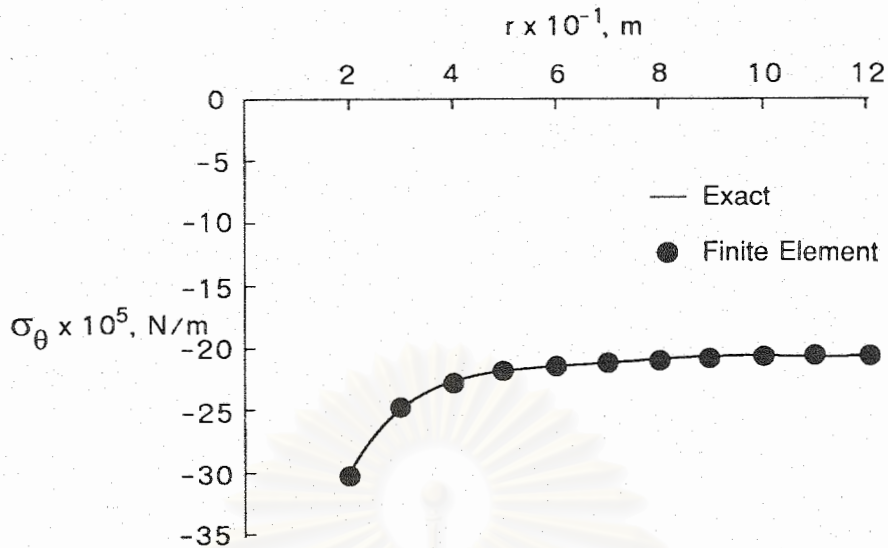


รูปที่ 4.12 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของแผ่นวงแหวนบางในรูปที่ 4.11

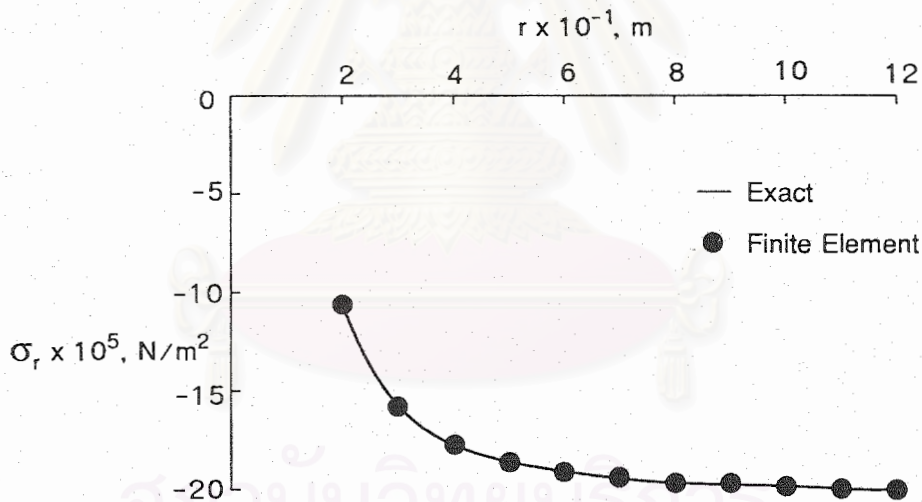
หลังจากที่คำนวณปัญหาในรูป 4.12 ด้วยโปรแกรม AXISSYM แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในสมการ (4.30) แล้วทำการพล็อตกราฟเปรียบเทียบ สำหรับการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีที่ได้จากโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังรูปที่ 4.13 เปรียบเทียบผลของความเค้นในแนวสัมผัสดังรูปที่ 4.14 และเปรียบเทียบผลของความเค้นในแนวรัศมีดังรูปที่ 4.15



รูปที่ 4.13 การเปรียบเทียบการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรง และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นวงแหวนบาง ภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o



รูปที่ 4.14 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวสัมผัสระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o

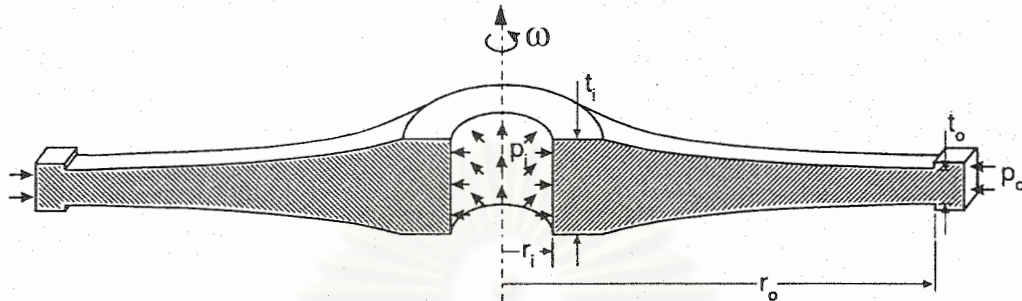


รูปที่ 4.15 การเปรียบเทียบความเค้นในแนวรัศมีระหว่างผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ของปัญหาแผ่นวงแหวนบางภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o

จากตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 และ 4.7.2 พบว่าการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรม AXISSYM กับผลเฉลยแม่นยำ มีความผิดพลาดน้อยมาก กล่าวคือ สำหรับความผิดพลาด (Error) ของการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีมีค่า 0.06% ความเค้นในแนวสัมผัสมีค่า 0.07% และความเค้นในแนวรัศมีมีค่า 0.006% ก่อให้เกิดความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรม AXISSYM เพื่อให้วิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป

4.7.3 การประยุกต์ใช้โปรแกรม AXISSYM กับปัญหา Turbine casing

โดยทั่วไป Turbine Casing นับเป็นอีกปัญหาหนึ่งซึ่งมีความสมมาตรรอบแกน ผู้วิจัยได้จำลองลักษณะของ Turbine Casing ขึ้นมา ดังแสดงในรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 แบบจำลองของ Turbine Casing ซึ่งรับแรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ภายใต้ความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o และอุณหภูมิ

ขนาดต่างๆของปัญหานี้ดังแสดงในรูปที่ 4.16 ประกอบด้วย

รัศมีภายใน $(r_i) = 0.15 \text{ m}$

รัศมีภายนอก $(r_o) = 0.94 \text{ m}$

ความหนาภายใน $(t_i) = 0.2 \text{ m}$

ความหนาภายนอก $(t_o) = 0.07 \text{ m}$

ภาวะที่มากกระทำ

ความดันภายใน $(p_i) = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

ความดันภายนอก $(p_o) = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

อัตราเร็วเชิงมุม $(\omega) = 209.44 \text{ rad/s}$

ส่วนอุณหภูมิที่กระทำนั้นเป็นฟังก์ชันเอกซโปเนนเชียลซึ่งมีการกระจายจากผิวด้านในไปยังผิวด้านนอกโดยอุณหภูมิที่ผิวรัศมีภายในมีค่าเป็น 87°C และอุณหภูมิที่ผิวรัศมีภายนอกมีค่า 200°C

คุณสมบัติต่างๆของวัสดุ

เลือกใช้วัสดุ AISI 403 มีคุณสมบัติต่างๆดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน $(\alpha) = 11.7 \times 10^{-6} \text{ } /^\circ\text{C}$

ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซอง $(\nu) = 0.343$

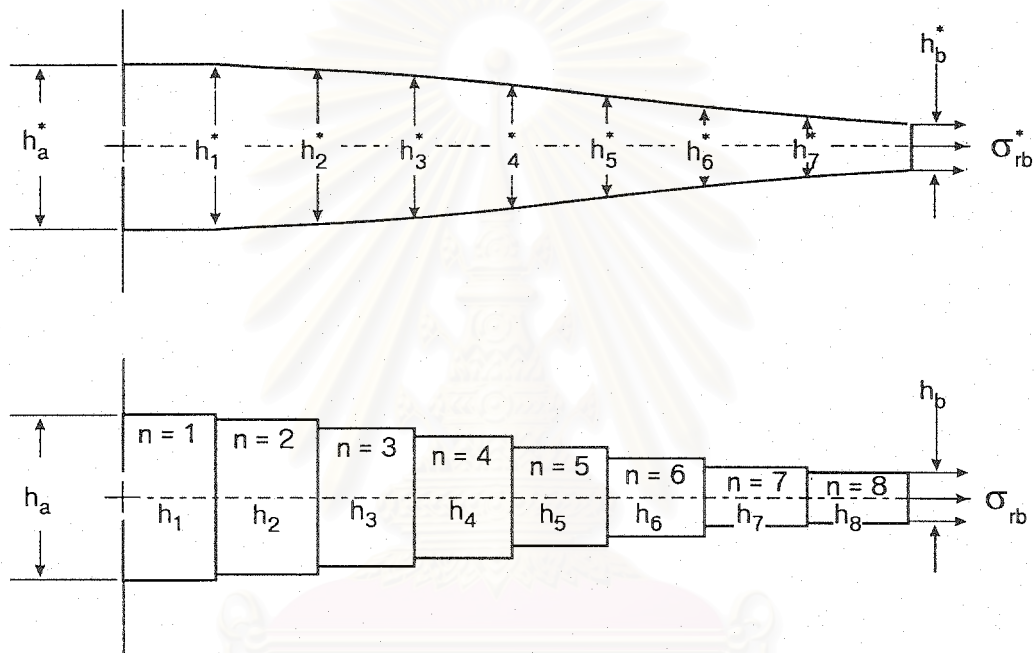
ค่าความหนาแน่นของวัสดุ $(\rho) = 7800 \text{ Kg/m}^3$

ค่า Young's Modulus ของความยืดหยุ่น $(E) = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น $(T_0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$

Turbine Casing ดังแสดงในรูป 4.16 มีลักษณะซับซ้อน และไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้ ต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนซึ่งมีรูปร่างซับซ้อนนั้นสามารถใช้วิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) หรือ ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้

วิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) วิธีหนึ่งสำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนที่รูปร่างไม่ซับซ้อนมากนัก ได้มีแนวคิดในการคำนวณด้วยการแบ่งขอบเขตปัญหาออกเป็นวงแหวนที่มีหน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่มีความหนาคงที่หลายๆชั้น ดังเช่นแสดงในรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 วิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) ของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน

หลักการคำนวณเริ่มจากการพิจารณาหน้าสัมผัสของวงแหวนแต่ละชั้นซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวรัศมีจาก σ_{rn} ไปเป็นค่า $\sigma_{r(n+1)}$ และความเค้นในแนวสัมผัสจาก σ_{tn} ไปเป็น $\sigma_{t(n+1)}$ โดยที่ความหนาของวงแหวนเปลี่ยนแปลงจากความหนา h_n ไปเป็น h_{n+1} เนื่องจากหน้าสัมผัสของวงแหวนแต่ละชั้นนั้นจะต้องมีการสมดุลของแรง โดยแรงในแนวรัศมีเนื่องจาก σ_{rn} เขียนแทนด้วย p_n มีค่าเป็น $2\pi r h_n \sigma_{rn}$ ส่วนแรงในแนวรัศมีที่หน้าสัมผัสเดียวกันแต่เป็นแรงเนื่องจากความเค้นในแนวรัศมี $\sigma_{r(n+1)}$ แทนด้วยแรง p_{n+1} มีค่าเป็น $2\pi r h_{n+1} \sigma_{r(n+1)}$ เมื่อทำการสมดุลแรงทั้งสองคือ $p_n = p_{n+1}$ แล้วจัดพจน์ใหม่จะได้การเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวรัศมีที่แต่ละหน้าตัด

$$\sigma_{r(n+1)} = \sigma_{rn} \frac{h_n}{h_{n+1}} \quad (4.31)$$

นอกจากนั้น การเคลื่อนตัวในแนวรัศมีที่แต่ละหน้าสัมผัสของวงแหวนแต่ละชั้นจะต้องเท่ากัน นั่นคือ

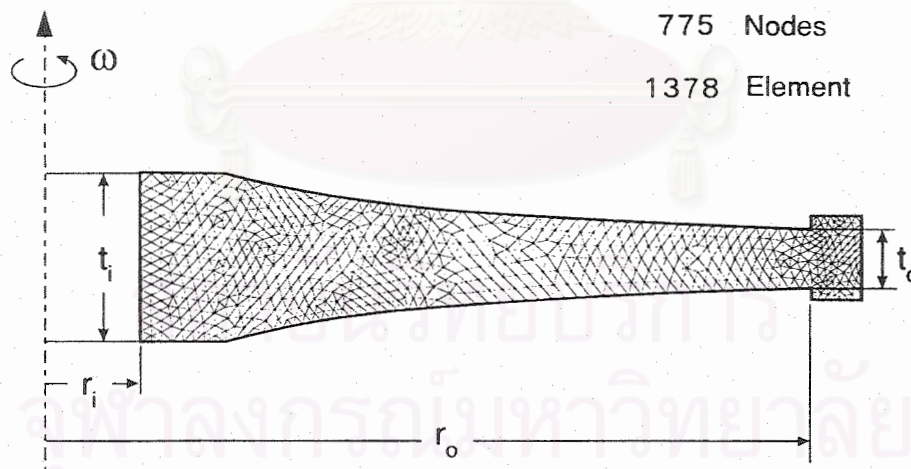
$$u(r) = \frac{r}{E} (\sigma_{\theta n} - \nu \sigma_{r n}) = \frac{r}{E} (\sigma_{\theta(n+1)} - \nu \sigma_{r(n+1)})$$

จัดพจน์ใหม่จะได้การเปลี่ยนแปลงของความเค้นในแนวสัมผัสที่แต่ละหน้าตัดดังนี้

$$\sigma_{\theta(n+1)} = \sigma_{\theta n} + \nu \sigma_m \left(\frac{h_n}{h_{n+1}} - 1 \right) \quad (4.32)$$

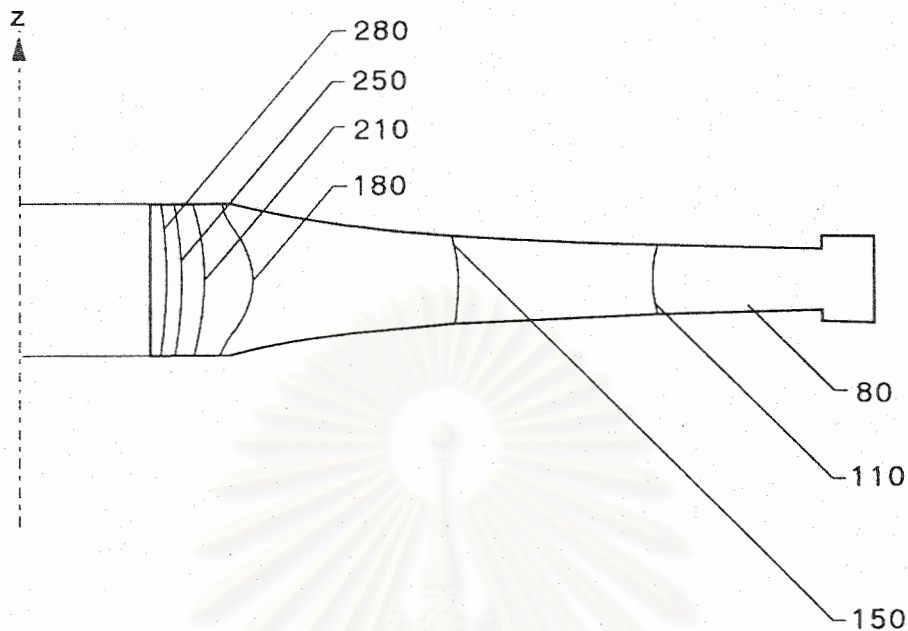
ความเค้นภายในวงแหวนแต่ละชั้น สามารถคำนวณในลักษณะเดียวกับแผ่นวงแหวนบางดังตัวอย่างในหัวข้อ 4.7.1 และ 4.7.2 โดย r_i , r_o ที่แสดงในหัวข้อดังกล่าวนั้น เมื่อนำมาคำนวณสำหรับแต่ละวงแหวนในหัวข้อนี้ ก็จะแทนด้วย r_n , r_{on} ตามลำดับ ดังนั้น เมื่อเราทราบความเค้นที่ขอบเขตของทั้งปัญหา คือ σ_r , σ_θ ก็สามารถนำหลักการต่างๆ ที่กล่าวไว้ในหัวข้อนี้มากระจายความเค้นที่ตำแหน่งต่างๆ ได้

ส่วนการหาผลเฉลยโดยประมาณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถทำได้ด้วยการใช้โปรแกรม AXISSYM โดยรูปที่ 4.18 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งประกอบด้วย 775 จุดต่อ และ 1378 เอลิเมนต์



รูปที่ 4.18 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของ Turbine Casing ในรูปที่ 4.16

หลังจากที่ได้คำนวณปัญหา Turbine Casing ในรูปที่ 4.18 ด้วยโปรแกรม AXISSYM เสร็จแล้วนำไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้ไปแปลงให้อยู่ในรูปแบบของความเค้นของ Von Mises ลักษณะของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณแสดงได้ดังรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m² และการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นบน Turbine Casing ในรูปที่ 4.16

ในบทนี้ ได้อธิบายรายละเอียดและขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกน และได้แสดงถึงแนวคิดในการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จากค่าเฉลี่ย \bar{r} , \bar{z} ซึ่งพิจารณาได้เป็นค่าคงที่สำหรับเอลิเมนต์นั้นๆ ก่อให้เกิดความสะดวกในการอินทิเกรตเพื่อประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ ส่งผลให้สามารถตั้งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้สะดวกขึ้น ซึ่งจากการพิสูจน์ความถูกต้องด้วยการเปรียบเทียบกับปัญหาที่มีรูปร่างง่าย ๆ ที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง ในหัวข้อ 4.7.1 และ 4.7.2 พบว่าด้วยวิธีการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จากค่าเฉลี่ยดังกล่าวก็สามารถให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงได้โดยมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.1% หากแบ่งเอลิเมนต์ให้มากเพียงพอ

ส่วนการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาสมมาตรรอบแกนที่มีรูปร่างซับซ้อนนั้นสามารถกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สะดวกและเหมาะสมกว่าวิธีการคำนวณแบบเดิม (Classical method) มาก ซึ่งการคำนวณด้วยวิธีการแบบเดิมจะยุ่งยาก และอาจก่อให้เกิดความผิดพลาดสูง หากแบ่งจำนวนชั้นไม่เพียงพอ การแก้ปัญหาแบบเดิมนี้อาจใช้ได้ดีกับรูปร่างที่ไม่มีความซับซ้อนมากนัก เพราะจำเป็นต้องแบ่งหน้าตัดของวงแหวนนี้ออกเป็นท่อนสั้นๆที่มีความหนาคงที่โดยนำมาซ้อนต่อเนื่องกัน

บทที่ 5

การวิเคราะห์การเสีรูปและความเค้นของใบพัดกังหันไอน้ำ

ลักษณะของใบพัดกังหันไอน้ำที่จะทำการวิเคราะห์นั้น เป็นใบพัดที่มีรูปทรงตันทั่วไป ซึ่งทำงานภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ความดัน และอุณหภูมิสูง เป็นการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งที่มีความยืดหยุ่นได้ในสามมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน โดยในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาของแข็งที่มีความยืดหยุ่นได้ในสามมิติ และขั้นตอนในการประดิษฐ์โปรแกรมคำนวณที่สอดคล้องกันขึ้น รวมทั้งยกตัวอย่างการคำนวณและการนำไปประยุกต์เพื่อวิเคราะห์การเสีรูปและความเค้นของใบพัดกังหันไอน้ำ

5.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงความสมดุลของของแข็งที่มีความยืดหยุ่นในสามมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 ดังแสดงในสมการที่ (2.1) โดยนำมากล่าวอีกครั้งในบทนี้ เพื่อความเข้าใจอย่างต่อเนื่อง

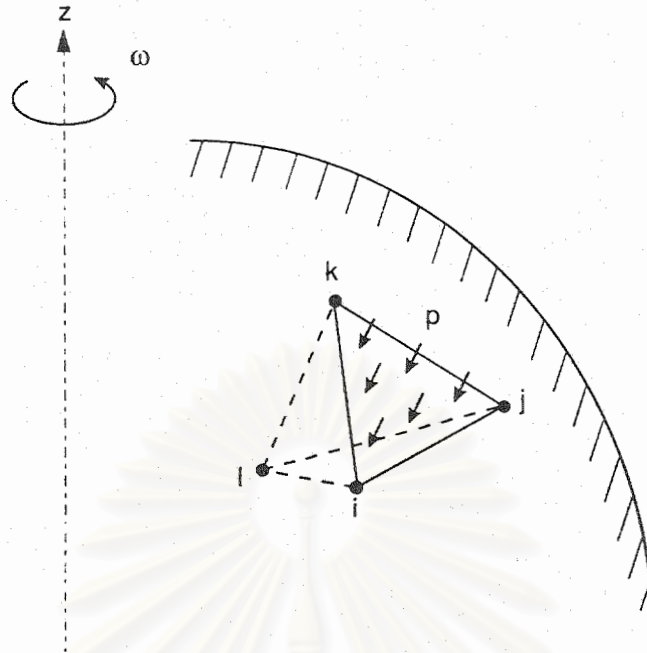
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (5.1ก)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (5.1ข)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (5.1ค)$$

5.2 เงื่อนไขขอบเขต

เงื่อนไขขอบเขตของการวิเคราะห์ของแข็งในสามมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ประกอบไปด้วยการกำหนดค่าการเสีรูปบนผิวของแข็งบางส่วน และการกำหนดเงื่อนไขความเค้นที่ผิวบนพื้นผิวบางส่วน ดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ในสามมิติ

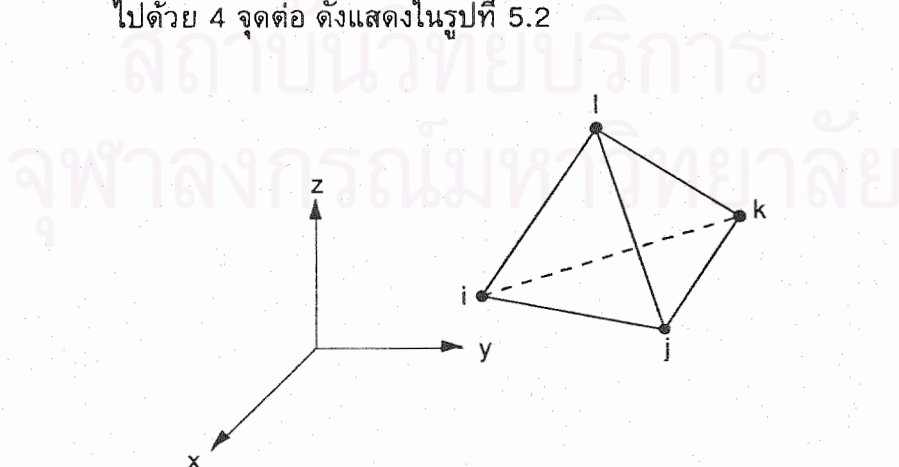
โดยเงื่อนไขขอบเขตต่างๆดังกล่าว ได้อธิบายโดยละเอียดในหัวข้อ 2.2.1 ของบทที่ 2

5.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

5.3.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆในทำนองเดียวกันกับที่ได้อธิบายในบทที่ 3 และบทที่ 4 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ โดยลักษณะของเอลิเมนต์สำหรับของแข็งในสามมิตินี้ ผู้วิจัยได้เลือกใช้เอลิเมนต์ทรงสี่หน้า ซึ่งประกอบไปด้วย 4 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 ลักษณะของเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า ซึ่งใช้ในปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ในสามมิติ

ลักษณะของเอลิเมนต์เช่นนี้สามารถแบ่งให้เข้ากับรูปร่างของปัญหาใดๆได้โดยสะดวก และ
 ง่ายต่อการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 2 สมมติการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของตัวไม่ทราบค่า ในที่นี้ตัว
 ไม่ทราบค่าที่ต้องแก้ระบบสมการเพื่อหาค่า คือ การเสียรูป ซึ่งสามารถเขียน
 ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในรูปแบบของการเคลื่อน
 ตัวที่จุดต่อทั้งสิ้นได้ดังนี้

$$u(x, y, z) = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 \quad (5.2ก)$$

$$v(x, y, z) = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 \quad (5.2ข)$$

$$w(x, y, z) = N_1w_1 + N_2w_2 + N_3w_3 + N_4w_4 \quad (5.2ค)$$

โดย u, v, w แทนการเคลื่อนตัวตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ และฟังก์ชันประมาณภายใน
 สำหรับเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$N_i(x, y, z) = \frac{1}{6V}(a_i + b_ix + c_iy + d_iz) \quad \text{โดย } i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.3ก)$$

ในที่นี้

$$V = \text{ปริมาตรของเอลิเมนต์} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (5.3ข)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & c_1 &= - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \\ b_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & d_1 &= - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.3ค)$$

และค่าคงที่ตัวอื่นๆ $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 2, 3, 4$ นั้นมีลักษณะในทำนองเดียวกันกับสมการ
 (5.3ค) ซึ่งสามารถเขียนออกมาได้โดยวิธีการวนสลับเปลี่ยนตัวเลข (Cyclic permutation)

ขั้นตอนที่ 3 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ โดยประยุกต์ระเบียบ
 วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้างของกัลเลอร์คิน ขั้นตอนของระเบียบวิธีดังกล่าว
 เริ่มจากการคูณสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i จากนั้นทำการ
 อินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนขอบเขตของเอลิเมนต์นั้น และกำหนดผลที่ได้ให้

เท่ากับศูนย์ สำหรับฟังก์ชันน้ำหนักนั้นหากเลือกให้ เหมือนกับฟังก์ชันประมาณภายในของเอลิเมนต์ N_i จะเรียกระเบียบวิธีดังกล่าวว่า ระเบียบวิธีของบับโนฟ-กัลเลอร์คิน (Bobnov-Galerkin)

เมื่อทำการประยุกต์ขั้นตอนของระเบียบถ่วงน้ำหนักเศษตค่างของกัลเลอร์คินดังกล่าวเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็งในทิศทางตามแกน x ดังแสดงในสมการที่ (5.1ก) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\int_{\Omega} W_i \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i (f_x) d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

โดย Ω แทนโดเมนขอบเขตของปริมาตร

จากทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ซึ่งกล่าวว่า

$$\int_{\Omega} W_i (\nabla \cdot \vec{v}) d\Omega = \int_{\Gamma} u (\vec{v} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \vec{v}) d\Omega \quad (5.5)$$

ทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ เข้ากับพจน์แรกของสมการ (5.4) โดยการเปรียบเทียบสัญลักษณ์ของตัวแปรทางด้านซ้ายของสมการ (5.5) เข้ากับพจน์แรกของสมการ (5.4) จะได้ว่า

$$u = W_i$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{v} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}$$

และ $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$

เมื่อประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์เข้ากับพจน์แรกของสมการ (5.4) ทำให้สมการดังกล่าวกลายเป็น

$$\int_{\Gamma} W_i (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial W_i}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \tau_{xz} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i f_x d\Omega = 0 \quad (5.6)$$

แทนเงื่อนไขขอบเขตความเค้นที่ผิวจากสมการ (2.16) คือ $\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = p_x$ ลงในสมการ (5.6) จากนั้นประยุกต์ระเบียบวิธีการของบับโนฟ-กัลเลอร์คิน ซึ่งกำหนดให้ $N_i = W_i$ แล้วทำการจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในเมตริกซ์ ดังนั้นจากสมการ (5.6) จะได้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} p_x d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} f_x d\Omega \quad (5.7)$$

หากพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็งในทิศทางตามแกน y สมการที่ (5.2ข) เมื่อทำการประยุกต์ด้วยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษดกค้ำของกัลเลอร์คิน จะได้

$$\int_{\Omega} W_i \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i f_y d\Omega = 0 \quad (5.8)$$

ทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (5.5) เข้ากับพจน์แรกของสมการ (5.8) แล้วจัดพจน์ใหม่ จะได้

$$\int_{\Gamma} W_i (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial W_i}{\partial z} \tau_{xz} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i f_y d\Omega = 0 \quad (5.9)$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบเขตความเค้นที่ผิวจากสมการ (2.16) คือ $\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = p_y$ ลงในสมการ (5.9) แล้วทำการประยุกต์ระเบียบวิธีการของบับโนฟ-กัลเลอร์คิน ซึ่งกำหนดให้ $N_i = W_i$ จากนั้นจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในเมตริกซ์ ทำให้สมการ (5.6) สามารถแปลงรูปมาได้เป็น

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} p_y d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} f_y d\Omega \quad (5.10)$$

และเมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็งในทิศทางตามแกน z สมการที่ (5.2ค) ประยุกต์ด้วยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษดกค้ำของกัลเลอร์คิน จะได้

$$\int_{\Omega} W_i \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i f_z d\Omega = 0 \quad (5.11)$$

จากนั้นทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (5.5) เข้ากับพจน์แรกของสมการ (5.11) ทำให้สมการดังกล่าวกลายเป็น

$$\int_{\Gamma} W_i (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \sigma_z \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_i f_z d\Omega = 0 \quad (5.12)$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบเขตความเค้นที่ผิวจากสมการ (2.16) คือ $\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = p_z$ ลงในสมการ (5.12) ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีการของบับโนฟ-กัลเลอร์ดิมคือให้ $N_i = W_i$ แล้วจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ ดังนั้นสมการ (5.12) สามารถแปลงรูปมาได้เป็น

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} p_z d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} f_z d\Omega \quad (5.13)$$

รวมเมตริกซ์จากสมการ (5.7) (5.10) และ (5.13) เข้าเป็นเมตริกซ์เดียวกัน จะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} d\Omega \quad (5.14)$$

โดย

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.15)$$

และ

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.16)$$

เมตริกซ์ $\{\sigma\}$ จากด้านซ้ายของสมการ (5.14) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความเครียด โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจากสมการที่ (2.10) ถึง (2.13) ซึ่งนำมากล่าวในที่นี้อีกครั้งเพื่อความต่อเนื่อง

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon - \varepsilon_0\} \quad (5.17ก)$$

โดย $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]$ (5.17ข)

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5.17ค)$$

$$\{\varepsilon_0\}^T = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (5.17ง)$$

โดย $\Delta T = T(x,y,z) - T_0$ ซึ่ง T_0 คืออุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น สำหรับเมตริกซ์ของความเครียด $\{\varepsilon\}$ ในสมการที่ (5.16ก) นั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าการเคลื่อนตัว โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว จากสมการ (2.7) จากนั้นเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ \underline{B}_i จากสมการ (5.15) จะได้

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (5.17จ)$$

โดย $\{\varepsilon\}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (5.17ฉ)$

และ $\{\delta\} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & u_3 & v_3 & w_3 & u_4 & v_4 & w_4 \end{bmatrix} \quad (5.17ข)$

5.3.2 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

แทนค่าสมการ (5.17ก-ข) ลงในสมการ (5.14) แล้วจัดรูปใหม่จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเมตริกซ์ ดังนี้

$$\int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \{\delta\} = \int_{\Gamma} [N]^T \{p\} d\Gamma + \int_{\Omega} [N]^T \{f\} d\Omega + \int_{\Omega} [B]^T [C] \{\varepsilon_0\} d\Omega \quad (5.18)$$

โดย $[B] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix}$
 $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$

และ Ω แทนขอบเขตของปริมาตร Γ แทนขอบเขตของพื้นผิว เพื่อความง่ายต่อความเข้าใจในการประดิษฐ์โปรแกรม สมการ (5.18) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบที่เข้าใจง่ายขึ้นได้ดังนี้

$$[K]_e \{\delta\} = \{P\}_e + \{F\}_e + \{F_0\}_e \quad (5.19)$$

แต่ละพจน์ของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (5.19) สามารถแยกพิจารณาได้ดังต่อไปนี้

พจน์ด้านซ้ายของสมการ (5.19)

เนื่องจาก เมตริกซ์ $[B]$ และ $[C]$ เป็นเมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวคงที่สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ จึงอินทิเกรตได้โดยง่าย โดยจะได้เมตริกซ์ $[K]_e$ เป็นดังนี้

$$[K]_e = [B]^T [C] [B] V \quad (5.20)$$

โดย V แทนปริมาตรของเอลิเมนต์นั้น ซึ่งหาได้จากสมการที่ (5.3ข)

พจน์แรกด้านขวาของสมการ (5.19)

$$\{P\}_e = \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (5.21n)$$

หากพิจารณารูปที่ 5.1 ประกอบ จะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์ถูกความดัน p กระทำบนหน้า i, j, k โดย p_x, p_y, p_z คือ x, y, z components ของความดัน p ในรูป และสำหรับการอินทิเกรต

$$\int_{\Gamma} N_i dA = \frac{A}{3} \quad \text{โดย } A \text{ แทนขอบเขตพื้นที่ของหน้าที่ทำการอินทิเกรตนั้น ทำการประยุกต์}$$

เข้ากับสมการ (5.21ก) ก่อให้เกิด เมตริกซ์โหลดความดัน ดังนี้

$$\{P\}_e = \frac{A_{ijk}}{3} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21ข)$$

โดย A_{ijk} แทนพื้นที่ของด้านของเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบด้วยจุดต่อ i, j, k ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยใช้สมการ (4.6)

พจน์ที่สองด้านขวาของสมการ (5.19)

$$\{F\}_e = \int_{\Omega} [N]^T \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} d\Omega \quad (5.22ก)$$

โดย f_x, f_y, f_z แทนแรงวัตถุ (Body force) ในทิศทางตามแกน x, y, z ตามลำดับ หากไม่พิจารณาถึงแรงวัตถุเนื่องจากน้ำหนัก ดังนั้น $f_z=0$ ส่วน f_x และ f_y แทนแรงเหวี่ยงรอบแกน z ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ โดย $f_x = \rho\omega^2 x$ ส่วน $f_y = \rho\omega^2 y$ และเพื่อทำการอินทิเกรตได้โดยง่าย จึงคำนวณ f_x, f_y จากค่าเฉลี่ย \bar{x}, \bar{y} ตามลำดับ ซึ่งคิดเป็นค่าคงที่ของแต่ละเอลิเมนต์ และเนื่องจาก $\int_{\Gamma} N_i dV = \frac{V}{4}$ โดย V แทนปริมาตรของเอลิเมนต์ที่พิจารณา ทำให้เมตริกซ์ของโหลดเนื่องจากแรงเหวี่ยงรอบตัวเองหลังจากทำการอินทิเกรตบนปริมาตรของเอลิเมนต์นั้นได้เป็น



$$\{F\}_e = \rho \omega^2 \frac{V}{4} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 0 \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ 0 \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.22\text{ข})$$

พจน์สุดท้ายด้านขวาของสมการ (5.19)

$$\{F_0\} = [B]^T [C] \alpha \Delta T V \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

5.4 ลักษณะและรายละเอียดของโปรแกรม

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 5.3 ได้นำมาประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันขึ้น โดยโปรแกรมนี้นี้มีชื่อว่า SOLID3D ซึ่งมีเนื้อหาประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (MAIN PROGRAM) และอีก 5 โปรแกรมย่อย (SUBROUTINE PROGRAM) ซึ่งมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

5.4.1 การทำงานเริ่มจากอ่านข้อมูลของปัญหาที่จำเป็นต้องใช้ในการคำนวณ อยู่ในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM]

5.4.2 คำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (5.19) โดยเรียกโปรแกรมย่อย TETRA [SUBROUTINE TETRA] แล้วนำเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้จากโปรแกรมย่อย TETRA ไปรวมเป็นระบบสมการรวม โดยเรียกโปรแกรมย่อย ASSMBLE [SUBROUTINE ASSMBLE]

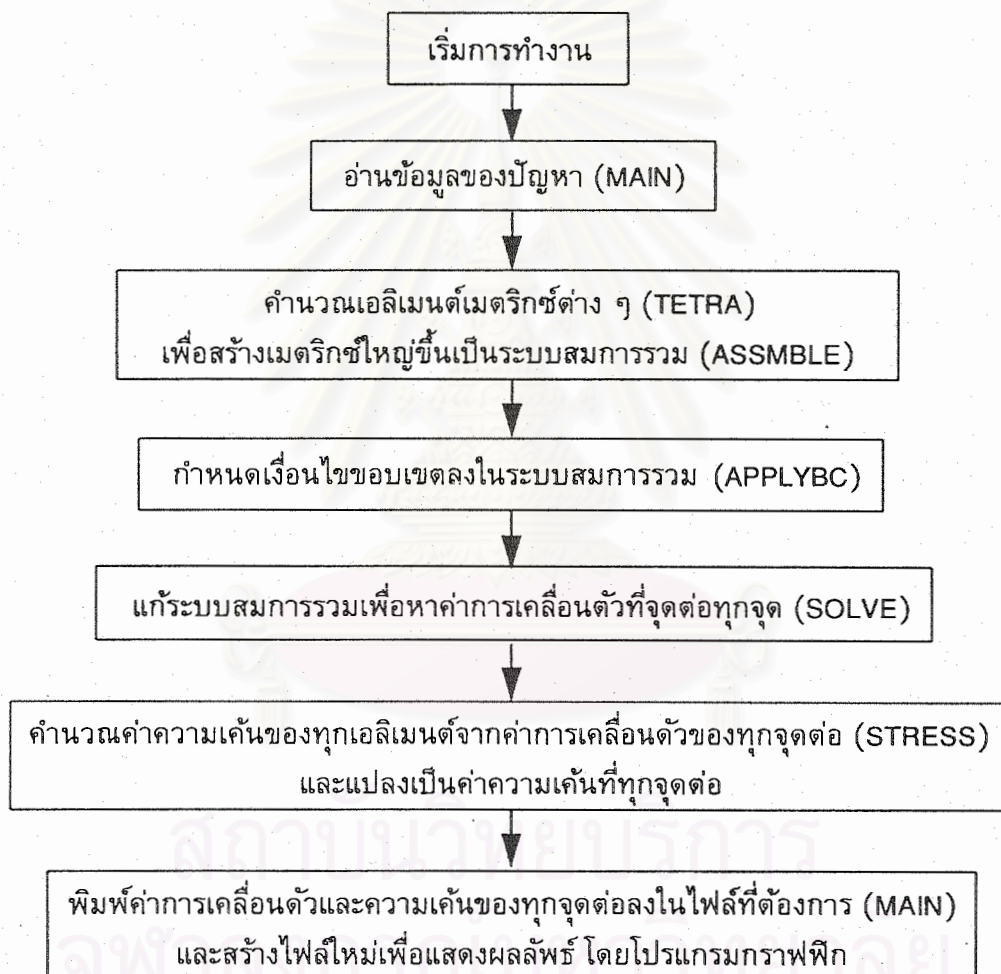
5.4.3 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตในระบบสมการรวม โดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC [SUBROUTINE APPLYBC]

5.4.4 แก่ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าการเสียรูปในแนวแกน x, y, z ของทุกจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรม SOLVE [SUBROUTINE SOLVE]

5.4.5 คำนวณค่าความเค้นของทุกเอลิเมนต์ จากค่าการเสียรูปที่กำหนดได้ สามารถคำนวณหาค่าความเค้นของทุกจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย STRESS [SUBROUTINE STRESS]

5.4.6 พิมพ์คำตอบของค่าเคลื่อนตัว u , v , w ของทุกจุดต่อ ความเค้นของเอลิเมนต์ และความเค้นของทุกจุดต่อ ลงในไฟล์ที่ต้องการ

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม SOLID3D สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของแผนภูมิการทำงานดังแสดงในรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ SOLID3D

5.5 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรม SOLID3D ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ค

5.6 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ

5.6.1 ลักษณะข้อมูลที่โปรแกรม SOLID3D ต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 9 ส่วนย่อย ดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก	ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษรอธิบายลักษณะของไฟล์
บรรทัดต่อไป	ประโยคอธิบายลักษณะของไฟล์ ซึ่งมีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้ในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

3

FINITE ELEMENT THERMAL STRESS ANALYSIS FOR 3D SOLID UNDER PRESSURE, CENTRIFUGAL FORCE, TEMPERATURE, NODAL FORCE

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา

บรรทัดแรก	คำระบุจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อที่รับแรงภายนอก จำนวนด้านที่มากที่สุดที่รับความดันของเอลิเมนต์
บรรทัดที่ 2	ตัวเลขจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อที่รับแรงภายนอก จำนวนด้านที่รับความดัน
ตัวอย่างเช่น	NPOIN NELEM NFORCE NSGROUP

50 75 3 2

หมายเหตุ: จำนวนด้านที่รับความดันสำหรับโปรแกรมนี้ ระบุค่าได้ถึง 3 ด้าน ซึ่งเป็นค่าที่เพียงพอสำหรับทุกปัญหา เนื่องจากหากแบ่งขอบเขตปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ ตั้งแต่ 2 เอลิเมนต์ขึ้นไปแล้วเอลิเมนต์หนึ่ง ๆ จะมีด้านซึ่งสามารถรับความดันได้อย่างมากที่สุดเพียง 3 ด้านเท่านั้น

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆ ของปัญหา

บรรทัดแรก	คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ
บรรทัดที่ 2	ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น อัตราส่วนปัวส์ซอง ความหนาแน่นของวัสดุ สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ ระดับอุณหภูมิที่ไม่มีความเค้น อัตราเร็วเชิงมุมรอบแกน z

ตัวอย่างเช่น	E	PR	DENSITY	ALPHA	TREF	ANGVEL
	161E9	0.36	8210	16.1E-6	0.	314.28

ส่วนที่ 4 ตำแหน่งของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อตำแหน่งของจุดต่อ
 บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ระยะทางตามแกน x ระยะทางตามแกน y ระยะทางตามแกน z ของจุดต่อ

ตัวอย่างเช่น	NODAL COORDINATES:			
	1	0.	0.	0.
	2	0.025	0.	0.
	:	:	:	:
	50	0.075	0.1	0.7

ส่วนที่ 5 อุณหภูมิของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้ออุณหภูมิของจุดต่อ
 บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ ตัวเลขแสดงค่าอุณหภูมิของจุดต่อนั้น

ตัวอย่างเช่น	NODAL TEMPERATURE:	
	1	400
	2	402
	:	:
	50	500

ส่วนที่ 6 เงื่อนไขขอบเขตของการจับยึดของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อเงื่อนไขขอบเขตการจับยึดของจุดต่อ
 บรรทัดต่อไป รหัสอักษร 8 ตัว ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ รหัสตัวเลขแสดงเงื่อนไขขอบเขตการเคลื่อนตัวของจุดต่อนั้นๆ

ตัวอย่างเช่น	NODAL TEMPERATURE:		
	SPCCONST	10	1
	SPCCONST	15	12
	SPCCONST	16	123
	ENDCONST	0	0

หมายเหตุ: รหัสอักษร 8 ตัว SPCCONST จะเป็นรหัสอักษรสำหรับจุดต่อที่มีการจับยึด ส่วนรหัสอักษร 8 ตัว ENDCONST จะเป็นรหัสอักษรปิดท้ายอีกบรรทัดหลังจากที่มีการระบุจุดต่อที่จับยึดจนหมดแล้ว ซึ่งรหัสอักษร ENDCONST จะต้องตามด้วยตัวเลข 0 อีกสองตัว

ความหมายของรหัสตัวเลข

1	หมายถึง	จุดต่อถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ตามแกน x
2	หมายถึง	จุดต่อถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ตามแกน y
3	หมายถึง	จุดต่อถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ตามแกน z
12	หมายถึง	จุดต่อถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ตามแกน x และตามแกน y
13	หมายถึง	จุดต่อถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ตามแกน x และตามแกน z
23	หมายถึง	จุดต่อถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ตามแกน y และตามแกน z
123	หมายถึง	จุดต่อถูกตรึงอยู่กับที่

ส่วนที่ 7 ลักษณะการรวมจุดต่อของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุหัวข้อมารวมจุดต่อของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขของจุดต่อทั้งสิ้นในทิศทวนเข็มนาฬิกาซึ่งประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่น

ELEMENT NODAL CONNECTIONS:

1	1	3	4	2
2	5	3	1	9
.
75	50	46	39	42

ส่วนที่ 8 ความดันภายนอกที่มากกระทำกับด้านต่างๆของชิ้นงาน

บรรทัดแรก คำระบุกลุ่มของความดัน

บรรทัดต่อไป รหัสอักษร 8 ตัว หมายเลขของเอลิเมนต์ที่รับความดัน ค่าความดันซึ่งตั้งฉากกับพื้นผิวเอลิเมนต์ที่รับความดัน หมายเลขของจุดต่อที่ไม่ได้เป็นจุดต่อที่เชื่อมโยงด้านที่รับความดัน

ตัวอย่างเช่น	SURFACE PRESSURE GROUP1			
	PRESSURE	25	-1000	2
	PRESSURE	37	- 500	10
	ENDGROUP	0	0	0
	SURFACE PRESSURE GROUP2			
	PRESSURE	25	-1000	7
	PRESSURE	40	- 500	28
	PRESSURE	47	- 700	39
	ENDGROUP	0	0	0

หมายเหตุ: รหัสอักษร 8 ตัว PRESSURE เป็นรหัสสำหรับ
บรรทัดที่แสดงค่าความดัน

ส่วนรหัสอักษร 8 ตัว ENDDGROUP จะวางไว้
บรรทัดสุดท้ายของแต่ละ PRESSURE GROUP
แล้วตามด้วยหมายเลขศูนย์ 3 ตัว

ส่วนค่าของความดันที่ระบุนั้น จะเป็นความดันที่
กระทำตั้งฉากกับพื้นผิว และ

ความดันมีค่าลบ หมายถึง ความดันมีทิศพุ่งออก
จากเอลิเมนต์

ความดันที่มีค่าบวก หมายถึง ความดันมีทิศพุ่ง
เข้าหาเอลิเมนต์

ส่วนที่ 9 แรงภายนอกที่กระทำกับจุดต่อ

บรรทัดแรก ค่าระบุหัวข้อแรงภายนอกที่มากระทำกับจุดต่อ
บรรทัดต่อไป หมายเลขของจุดต่อที่รับแรงภายนอก ค่าของแรง
ภายนอกที่จุดต่อนั้นในทิศตามแกน x ค่าของแรง
ภายนอกในทิศตามแกน y ค่าของแรงภายนอก
ในทิศตามแกน z

ตัวอย่างเช่น	NODAL FORCE			
	10	200	150	90
	12	-210	-10	9
	15	-300	720	15

5.6.2 รูปแบบไฟล์ข้อมูลตัวอย่างที่โปรแกรม SOLID3D ต้องการ ได้แสดงในรูปที่

5.4

```

2
Finite element to solve solid 3d-thermal stress
Operating with thermal, pressure load and nodal, body force
NPOIN  NELEM  NFORCE  NEPRESSURE
27      40      2          2
ELAS    POISSON  DENSITY  ALPHA    TREF.    ANGVEL
200E6   0.29     7800     11.7E-6  0.       52.36
NODAL COORDINATE:
1       0.       1.       1.
2       0.       1.       0.5
.       .       .       .
.       .       .       .
.       .       .       .
27      1.       0.       0.
NODAL TEMPERATURE LOAD:
1       250.
2       250.
.       .
.       .
.       .
27      250.
NODAL CONSTRAINTS:
SPCCONST 1          123
SPCCONST 4          123
SPCCONST 25         123
ENDCONST 0          0
ELEMENT NODAL CONNECTIONS:
1       1          5          4          13
2       1          2          5          11
.       .
.       .
.       .
.       .
40      15         27         17         23
SURFACE PRESSURE GROUP1
PRESSURE 12          200000.      5
PRESSURE 33          200000.     23
PRESSURE 37          200000.     15
PRESSURE 38          200000.     23
ENDGROUP 0           0           0
SURFACE PRESSURE GROUP1
PRESSURE 1           100000.     13
PRESSURE 12          100000.     17
PRESSURE 16          100000.     17
PRESSURE 17          100000.     15
ENDGROUP 0           0           0
NODAL FORCE
3       0.          0.         -5000.
9       0.          0.         -5000.

```

รูปที่ 5.4 ไฟล์ข้อมูลตัวอย่างที่โปรแกรม SOLID3D ต้องการ

ส่วนรูปแบบของไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่าง ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม SOLID3D ได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.5

```

THE FINITE ELEMENT MODEL OF INPUT FILE " format.dat "
CONSISTS OF 27 NODES AND 40 ELEMENTS
AND HALF BAND WIDTH OF 39
MEMORY REQUIRED
NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [ 27 ]:
NODE      U          V          W          R1          R2          R3
1         0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
2         0.870716E-01  0.779021E-01 -0.154855E-01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
.
.
.
27        0.166486E+00  0.132856E+00 -0.220230E-02  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
ELEMENTAL STRESS SOLUTIONS [ 40 ]:
ELEM      SXX          SYX          SZZ          SKY          SKZ          SYZ
1 -0.105714E+08 -0.187964E+08 -0.156393E+08 -0.618412E+07 -0.137408E+08 -0.115859E+08
2  0.254036E+07  0.177097E+07  0.685949E+07 -0.397769E+05 -0.856463E+07 -0.564358E+07
.
.
.
40  0.354268E+07  0.144119E+07  0.196543E+06  0.512806E+06 -0.232474E+07 -0.268603E+07
NODAL STRESS SOLUTIONS [ 27 ]:
NODE      SXX          SYX          SZZ          SKY          SKZ          SYZ
1 -0.161579E+07 -0.683075E+07 -0.144934E+07 -0.313324E+07 -0.892546E+07 -0.563604E+07
2  0.157012E+07  0.800736E+06  0.448408E+07 -0.397769E+05 -0.662060E+07 -0.424519E+07
.
.
.
27  0.178024E+07  0.204782E+07  0.242305E+06  0.461183E+06 -0.214809E+07 -0.274188E+07
ELEMENT NODAL CONNECTION
ELE      I      J      K      L
1         1      5      4      13
2         1      2      5      11
.
.
.
40        15     27     17     23

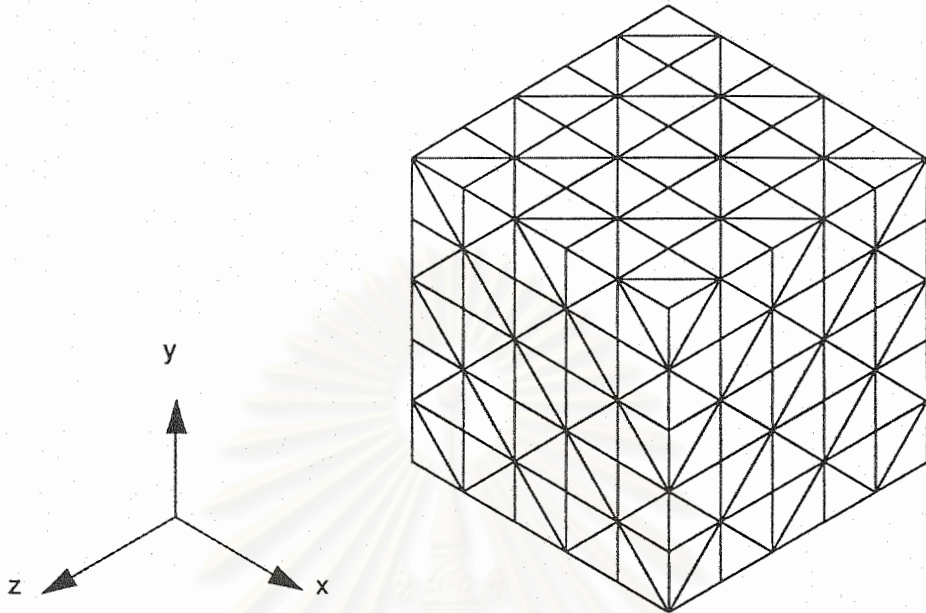
```

รูปที่ 5.5 ไฟล์ผลลัพธ์ตัวอย่างที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม SOLID3D

5.7 ตัวอย่างและการนำไปประยุกต์ใช้

5.7.1 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

โปรแกรม SOLID3D ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม โดยนำผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรมไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำของปัญหาตัวอย่างง่ายๆที่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำได้ ตัวอย่างเช่น แท่งสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ ดังแสดงในรูปที่ 5.6 ซึ่งมีอุณหภูมิเท่ากันทั้งก้อน แล้วปล่อยให้ขยายตัวอิสระ พบว่าค่าการเสียรูปที่ได้จากโปรแกรม SOLID3D กับที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำต่างกันน้อยกว่า 0.001%

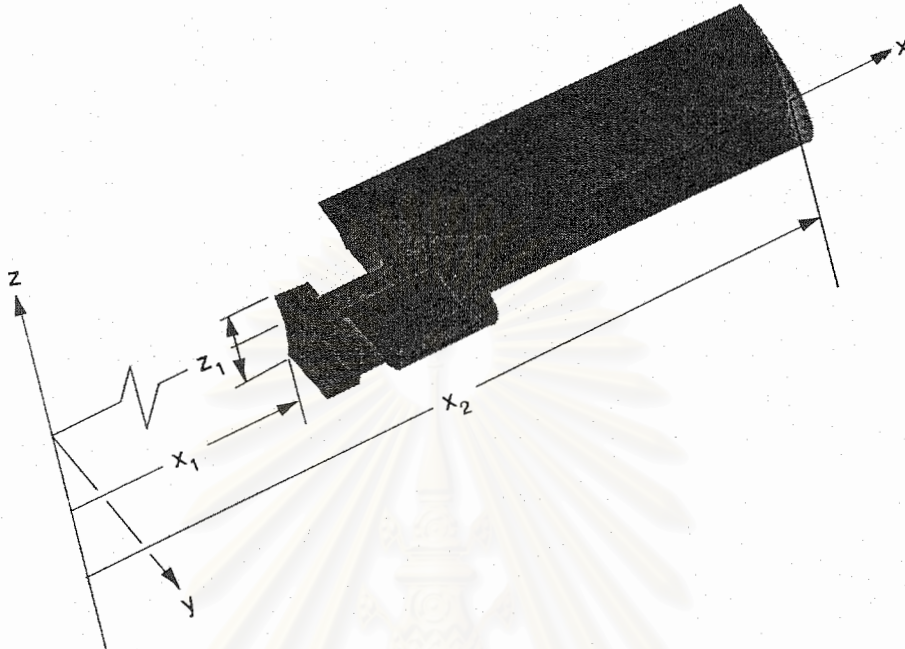


รูปที่ 5.6 ก้อนสี่เหลี่ยมลูกบาศก์มีอุณหภูมิเท่ากันทั้งก้อน

ปัญหาที่ใช้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมอีกปัญหาคือ แท่งสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ในรูปที่ 5.6 มีอุณหภูมิเท่ากันทั้งก้อน แต่สำหรับปัญหานี้ให้มีการยึด (Constraint) ที่ผิวนอกของก้อนสี่เหลี่ยมทั้ง 6 ด้าน ไม่ให้เคลื่อนที่คือขยายตัวไม่ได้ ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นที่คำนวณได้จากโปรแกรม SOLID3D และที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงมีความผิดพลาดน้อยกว่า 0.001%

5.7.2 การประยุกต์ใช้โปรแกรม SOLID3D กับปัญหาของใบพัดกังหันไอน้ำ

ใบพัดกังหันไอน้ำที่ใช้ในการวิเคราะห์มีลักษณะเป็นของแข็งทรงตัน ดังแสดงในรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7 ใบพัดกังหันไอน้ำ

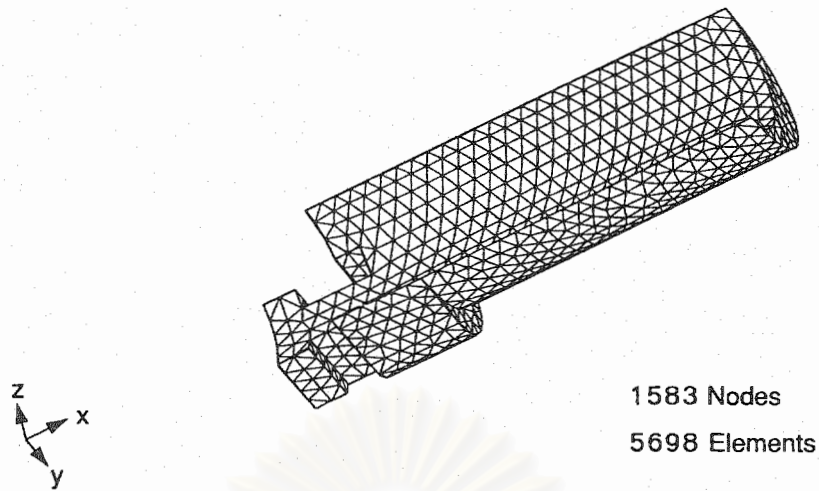
ใบพัดกังหันไอน้ำนี้ทำจากวัสดุ AISI 403 ซึ่งเป็นวัสดุสำหรับทำใบพัดกังหันไอน้ำโดยเฉพาะ สามารถทนความร้อนได้สูง และมีค่าความเค้นที่จุดคราก (Yield Strength) ถึง 585 MPa และมีคุณสมบัติต่างๆของวัสดุ ดังนี้

ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน	$(\alpha) = 11.7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$
ค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง	$(\nu) = 0.363$
ค่าความหนาแน่นของวัสดุ	$(\rho) = 7800 \text{ Kg/m}^3$
ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น	$(E) = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น	$(T_0) = 0^\circ\text{C}$

ขนาดของใบพัดนี้ได้แสดงคร่าวๆในรูปที่ 5.6 คือ

ระยะ	$x_1 = 1.074 \text{ m}$
	$x_2 = 1.167 \text{ m}$
	$z_1 = 0.013 \text{ m}$

ปัญหาใบพัดกังหันไอน้ำดังแสดงในรูป 5.7 นี้ ได้ทำการแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆจำนวน 5698 เอลิเมนต์ และประกอบไปด้วยจุดต่อทั้งหมด 1583 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.8

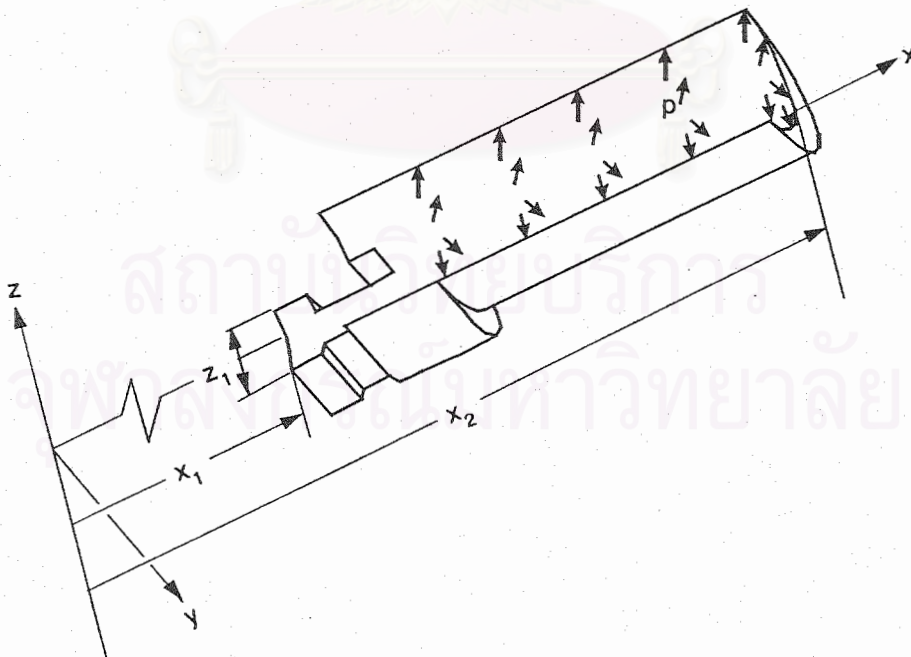


รูปที่ 5.8 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของไบพัดกัณฑ์ไอน้ำในรูปที่ 5.7

ไบพัดกัณฑ์ไอน้ำทำงานภายใต้โหลดกระทำร่วมกันระหว่างความดัน แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง และอุณหภูมิ ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาแยกเป็น 4 กรณี โดยใช้แบบจำลองเอลิเมนต์เดียวกันคือ แบบจำลองเอลิเมนต์จากรูปที่ 5.8 แต่เปลี่ยนแปลงโหลดที่กระทำเป็น 4 กรณีคือ ก) ความดันกระทำอย่างเดี่ยว ข) แรงเหวี่ยงรอบตัวเองอย่างเดี่ยว ค) อุณหภูมิอย่างเดี่ยว และ ง) รวมโหลดทุกอย่างจาก ก), ข) และ ค) เข้าด้วยกัน ผลของความเค้นและการเสียรูปซึ่งเกิดจากแต่ละกรณี

5.7.2ก) ไบพัดกัณฑ์ไอน้ำภายใต้ความดันกระทำอย่างเดี่ยวได้แสดงในรูปที่

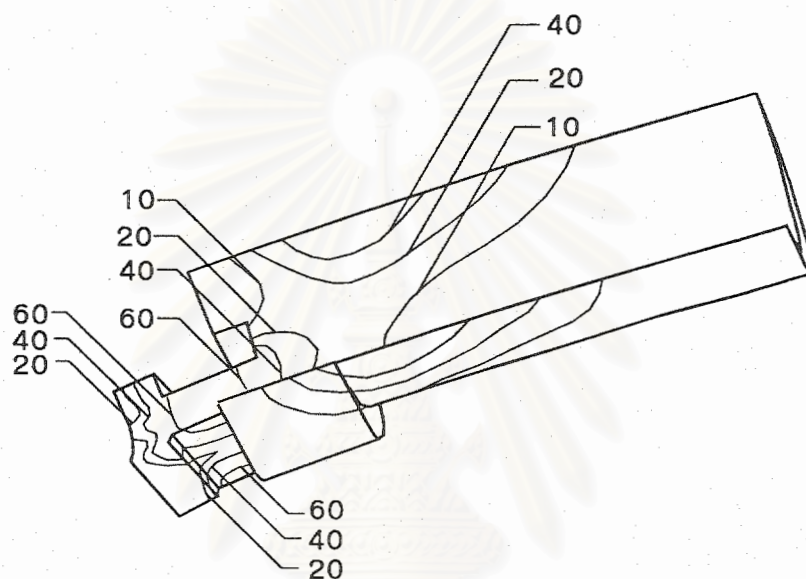
5.9



รูปที่ 5.9 ไบพัดกัณฑ์ไอน้ำภายใต้ความดัน p กระทำตั้งฉากกับผิวด้านหน้าของไบพัด

ใบพัดดังแสดงในรูป 5.9 นี้ จัดเป็นใบพัดประเภท Impulse ซึ่งรับความดัน p ที่คงที่ตลอดผิวหน้าของใบพัด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.8632 Ng/cm^2

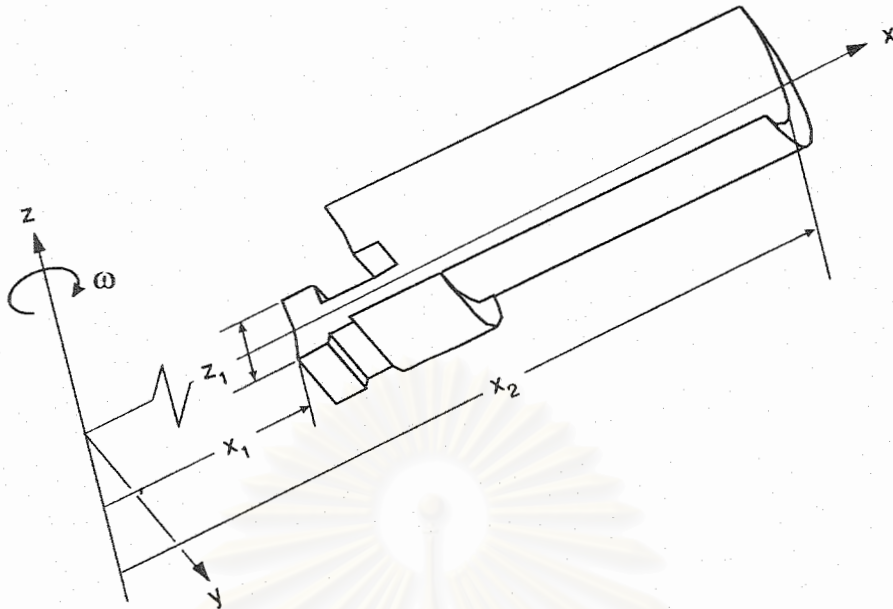
เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาในรูป 5.8 ด้วยโปรแกรม SOLID3D ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการเสียรูปและความเค้นแบบ Von Mises ดังแสดงในรูปที่ 5.10



รูปที่ 5.10 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้ความดัน (จากรูปที่ 5.9)

จากผลการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 5.10 แสดงให้เห็นว่าหากมีความดันกระทำกับใบพัดเพียงอย่างเดียวจะทำให้เกิดความเค้นสูงที่บริเวณคอของใบพัด (60 MN/m^2) และที่ขอบใบพัด (40 MN/m^2)

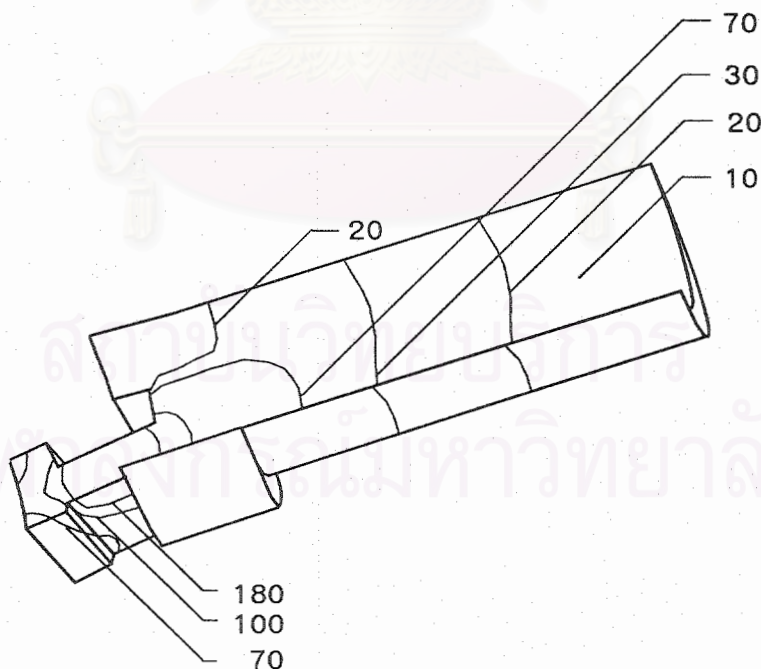
5.7.2ข) ใบพัดกังหันไอน้ำภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองอย่างเดียวยังได้แสดงในรูปที่ 5.11



รูปที่ 5.11 โบริกซ์ของคาน้ำภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่

แรงเหวี่ยงรอบแกน z ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω ดังแสดงในรูป 5.10 กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 2000 rpm หรือ 20.44 rad/s

เมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SOLID3D แล้ว ก่อให้เกิดผลลัพธ์ลักษณะการกระจายความเค้นแบบ Von Mises และการเสียรูป ดังแสดงในรูปที่ 5.12

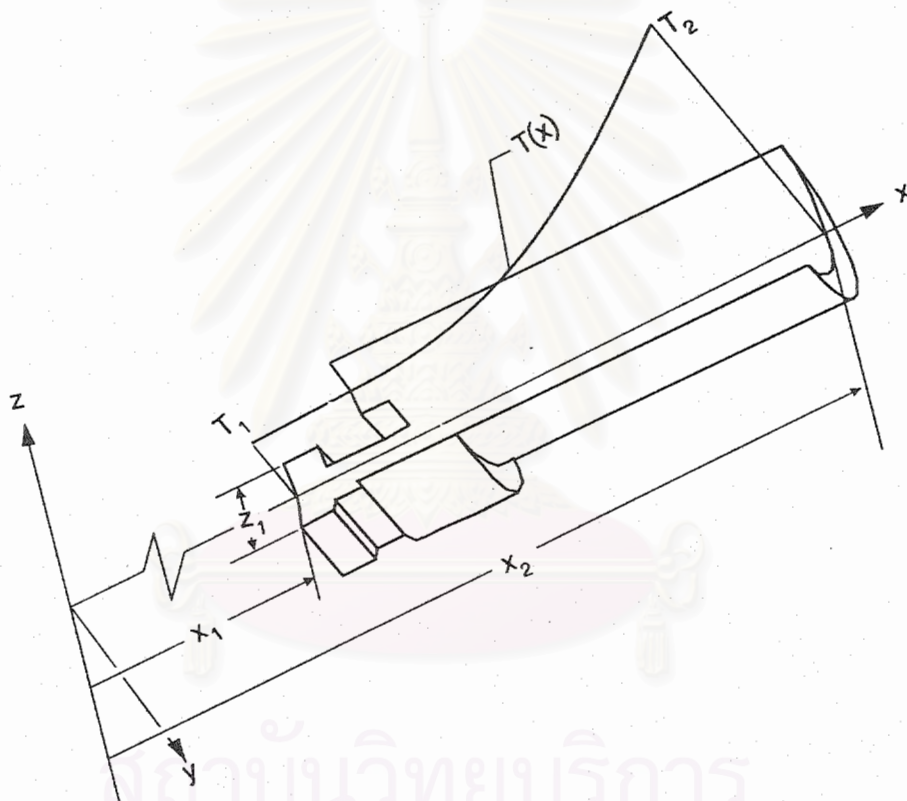


รูปที่ 5.12 ลักษณะการกระจายความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนโบริกซ์ของคาน้ำ ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ซึ่งแสดงในรูปที่ 5.11

ผลการคำนวณในรูปที่ 5.12 แสดงให้เห็นว่าผลของแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ทำให้เกิดความดันสูงบริเวณคอไบพัดเช่นเดียวกัน (180 MN/m^2) แต่มีขนาด (Magnitude) มากกว่าผลเนื่องจากความดัน

5.7.2ค) ไบพัดกังหันไอน้ำภายใต้อุณหภูมิต่างกัน

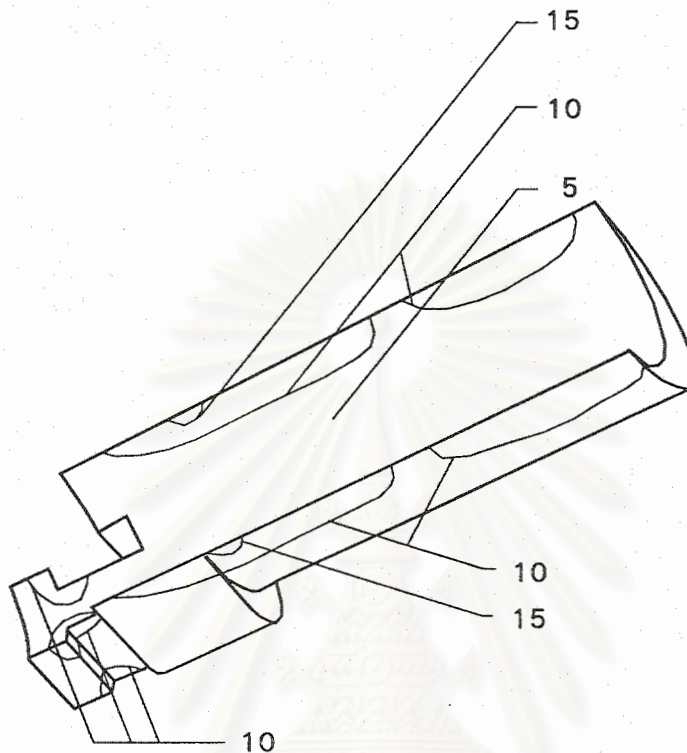
ลักษณะของอุณหภูมิต่างกันบนไบพัดกังหันไอน้ำ ได้แสดงในรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.13 ไบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้อุณหภูมิต่างกันที่แปรผันตามแกน x

การกระจายของอุณหภูมิต่างกันแสดงในรูปที่ 5.13 อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลที่แปรผันตามแกน x โดยมีค่าอุณหภูมิต่างกันที่ปลายทั้งสองด้านดังแสดงในรูปที่ 5.13 คือ $T_1 = 82^\circ\text{C}$ และ $T_2 = 194^\circ\text{C}$

เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาในรูปที่ 5.13 ด้วยโปรแกรม SOLID3D แล้ว ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการเสียรูปและการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises ดังแสดงในรูปที่ 5.14



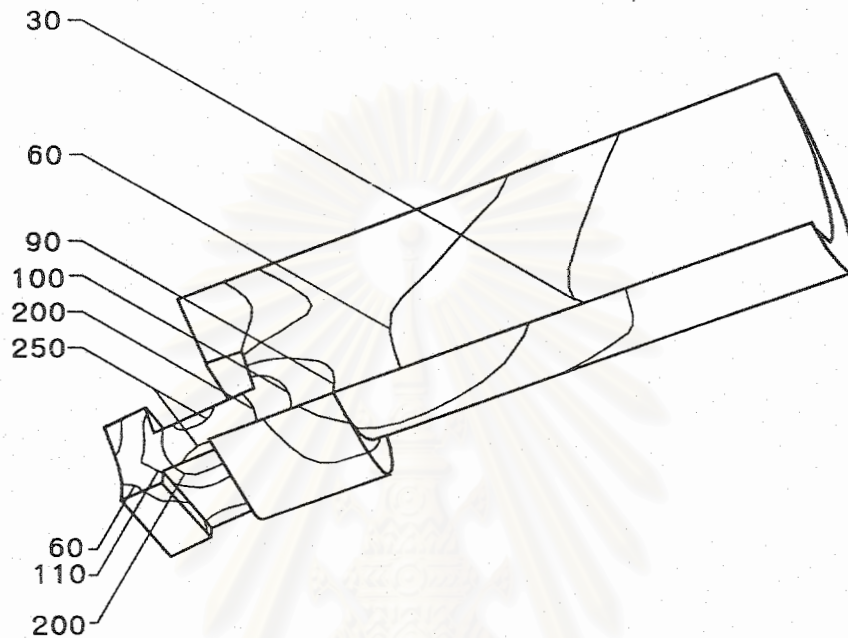
รูปที่ 5.14 ลักษณะการกระจายความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดกังหันไอน้ำ ภายใต้อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x ดังแสดงในรูปที่ 5.13

หากพิจารณาผลจากคำนวณในรูปที่ 5.14 จะพบว่าความเค้นที่เกิดขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับผลเนื่องจากความดันหรือแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ทั้งนี้เนื่องจากเหตุผลที่ว่าอุณหภูมิซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามแกน x นั้น มีอัตราการเปลี่ยนแปลงน้อย จนเกือบเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง ซึ่งถ้าหากลักษณะการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมีความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นตรงแล้ว จะไม่ก่อให้เกิดความเค้น

5.7.2ง) ใบพัดกังหันไอน้ำภายใต้ความเค้น แรงเหวี่ยงรอบตัว และอุณหภูมิกระทำร่วมกัน

เมื่อพิจารณาใบพัดกังหันไอน้ำซึ่งทำงานภายใต้สภาวะร่วมกันทั้งหมดระหว่างความดันในหัวข้อ 5.7.2ก แรงเหวี่ยงด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่รอบแกน z ในหัวข้อ 5.7.2ข

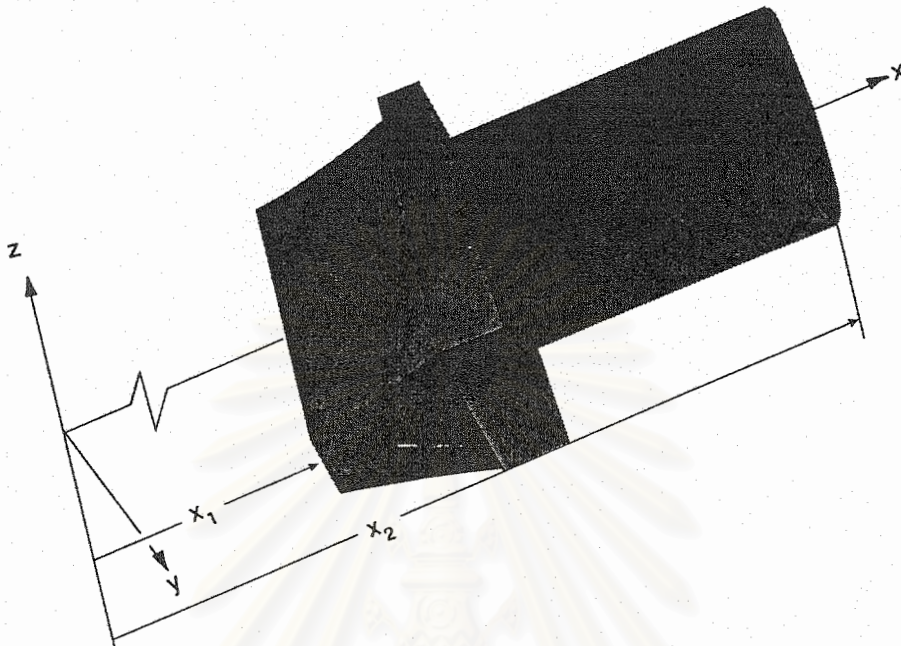
และอุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x ในหัวหัวข้อ 5.7.2ค ด้วยโปรแกรม SOLID3D แล้ว จะ ได้ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises และการเสียรูป ดังแสดงในรูปที่ 5.15



รูปที่ 5.15 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูป ที่เกิดขึ้นบนใบพัดกังหันไอน้ำ เมื่อทำงานภายใต้สภาวะร่วมกัน ระหว่าง ความดันคงที่ รูปที่ 5.9 อัตราเร็วเชิงมุมคงที่ รูปที่ 5.11 และ อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x รูปที่ 5.13

ผลจากการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 5.15 แสดงให้เห็นว่าแนวโน้มของความเค้นสูงนั้นเกิดขึ้นที่บริเวณคอของใบพัดกังหันไอน้ำ ดังนั้นในสภาวะการทำงานจริง ซึ่งมีทั้ง ความดัน อุณหภูมิ และแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง หากเกิดความเสียหายขึ้น ตำแหน่งที่เกิดการเสียหายก่อนของใบพัดกังหันไอน้ำ จึงควรจะเป็นบริเวณคอของใบพัดกังหันไอน้ำ

5.7.3 การประยุกต์ใช้โปรแกรม SOLID3D กับปัญหาใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์
 ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ ที่นำมาวิเคราะห์ที่มีรูปร่างดังแสดงในรูปที่ 5.16



รูปที่ 5.16 ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์

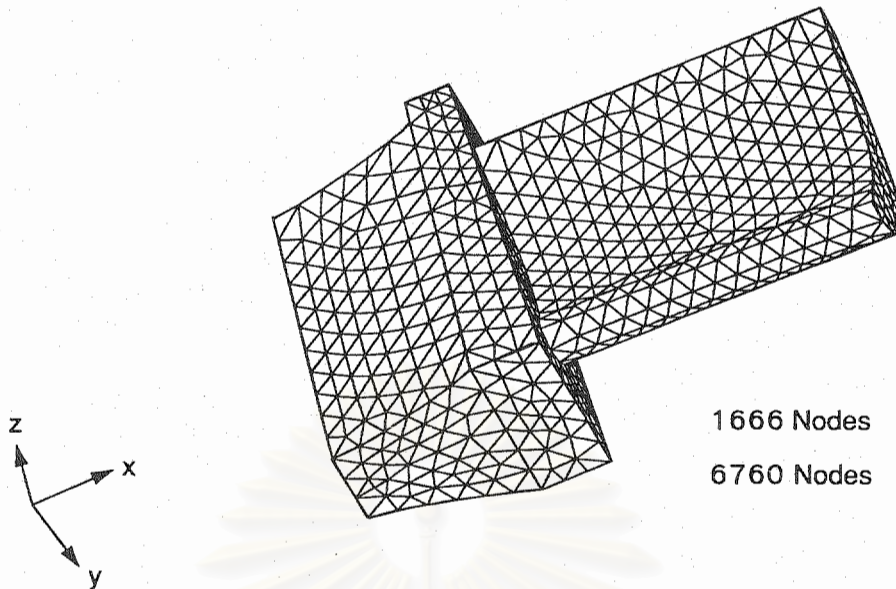
ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์นี้จะทำจากวัสดุ Udimet 520 ซึ่งเป็นโลหะจำพวก Super alloy ทนความร้อนได้สูงมาก และมีค่าความเค้นที่จุดคราก (Yield strength) ถึง 520 MPa โดยมีคุณสมบัติต่างๆของวัสดุดังกล่าว มีดังต่อไปนี้

ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน	$(\alpha) = 16.1 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
ค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง	$(\nu) = 0.36$
ค่าความหนาแน่นของวัสดุ	$(\rho) = 8190 \text{ Kg/m}^3$
ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น	$(E) = 161 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
ระดับอุณหภูมิที่วัสดุไม่เกิดความเค้น	$(T_0) = 0^\circ\text{C}$

ขนาดของใบพัดนี้ได้แสดงคร่าวๆในรูปที่ 5.16 คือ

ระยะ	$x_1 = 0.9 \text{ m}$
	$x_2 = 1.113 \text{ m}$

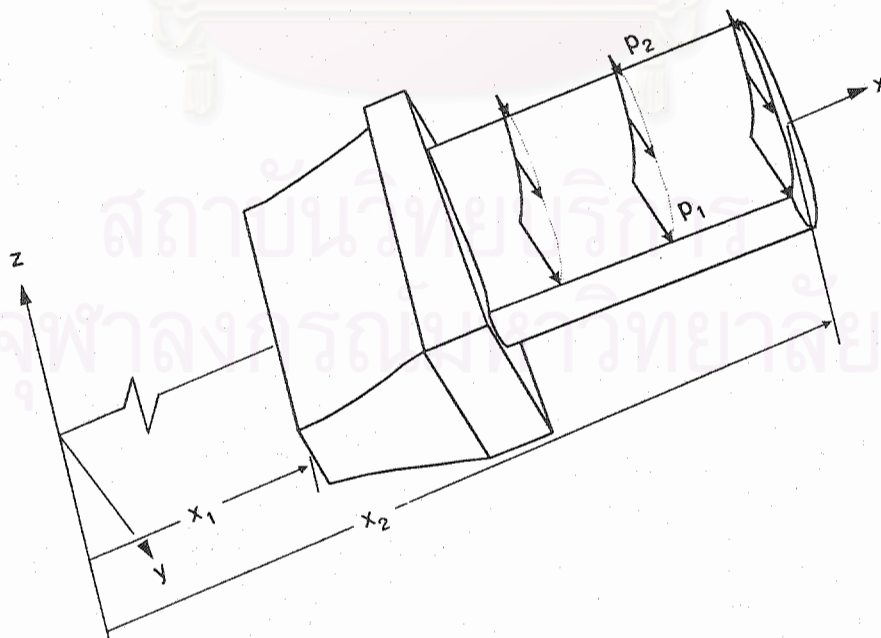
ในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการใช้โปรแกรม SOLID3D เริ่มจากการแบ่งปัญหาในรูปที่ 5.16 ออกเป็น 1666 จุดต่อ 6760 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.17



รูปที่ 5.17 การจัดแบ่งเอลิเมนต์ของใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ในรูปที่ 5.16

เนื่องจากใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ต้องทำงานภายใต้ความดัน แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง และ อุณหภูมิ ในเชิงเดียวกับใบพัดกังหันไอน้ำ จึงทำการคำนวณโดยแยกพิจารณาเป็น 4 กรณี เช่นเดียวกัน คือ พิจารณาภายใต้ความดัน แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง และอุณหภูมิ เพียงอย่างเดียว ซึ่งแยกเป็น 3 กรณี และกรณีสุดท้ายจึงรวมโหลดทั้งหมดเข้าด้วยกัน ดังมีรายละเอียด ดังต่อไปนี้

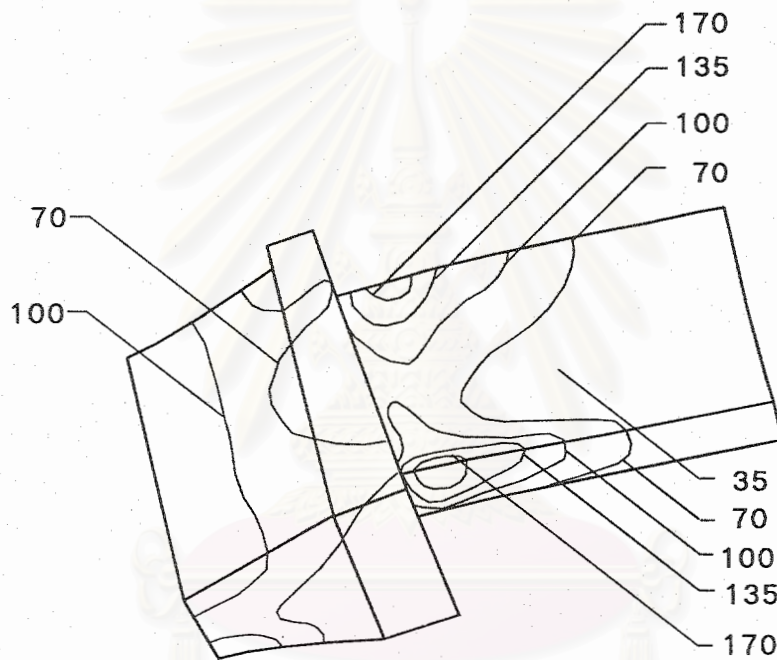
5.7.3ก) ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้ความดันกระทำเพียงอย่างเดียว
ลักษณะของความดันที่กระทำกับใบพัด ได้แสดงในดังรูปที่ 5.18



รูปที่ 5.18 ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้ความดันตั้งฉากกับผิวหน้า ซึ่งแปรผันตามแกน z

เนื่องจาก ไบพัตก๊าซเทอร์ไบน์ที่นำมาวิเคราะห์ เป็นแบบ Reaction ซึ่งลักษณะความดันที่กระทำกับไบพัตนั้นไม่เท่ากันตลอดผิวหน้า กล่าวคือจะมีความดันสูง (p_1) ที่ทางเข้า จากนั้นความดันจะลดลง เพื่อก่อให้เกิดปรากฏการณ์ Reaction กลายเป็นความดันที่ทางออก (p_2) ดังแสดงในรูปที่ 5.18 ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการจำลองลักษณะความดันดังกล่าว โดยให้ความดันที่กระทำอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ตามแกน z โดย $p_1 = 4$ MPa และ $p_2 = 0.55$ MPa

เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาในรูปที่ 5.18 ด้วยโปรแกรม SOLID3D แล้ว ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการเสียรูปและความเค้นแบบ Von Mises ดังแสดงในรูปที่ 5.19

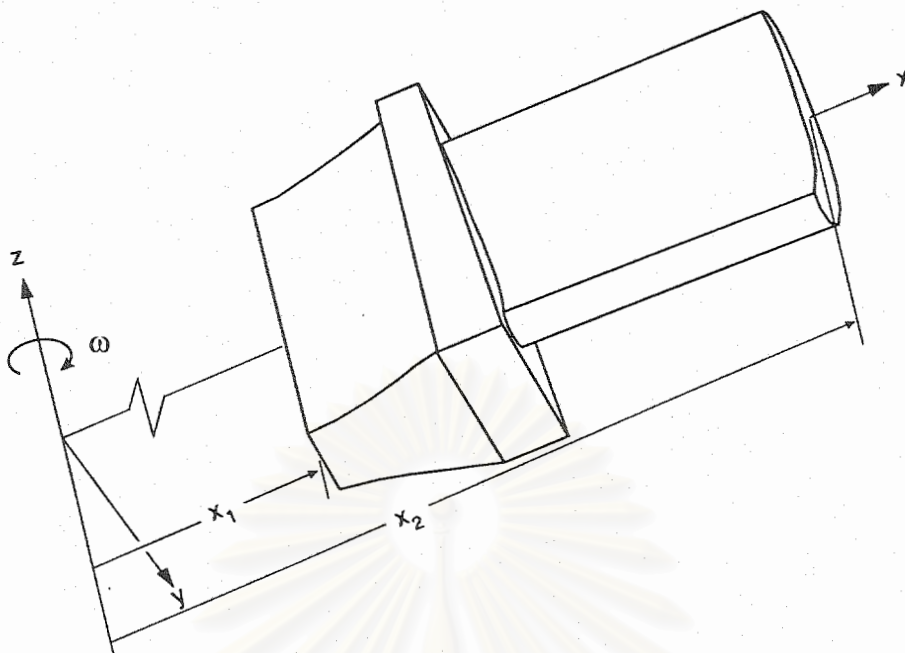


รูปที่ 5.19 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m² และการเสียรูปที่เกิดขึ้นกับไบพัตก๊าซเทอร์ไบน์ ภายใต้ความดันแบบแปรผันตามแกน z ดังแสดงในรูปที่ 5.18

จากผลการคำนวณในรูปที่ 5.19 แสดงให้เห็นว่าความดันมีผลให้เกิดความเค้นสูงบริเวณขอบด้านข้างใกล้ฐานของไบพัต (170 MN/m²)

5.7.3ข) ไบพัตก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้แรงเหวี่ยงรอบตัวเองได้แสดงดังรูปที่

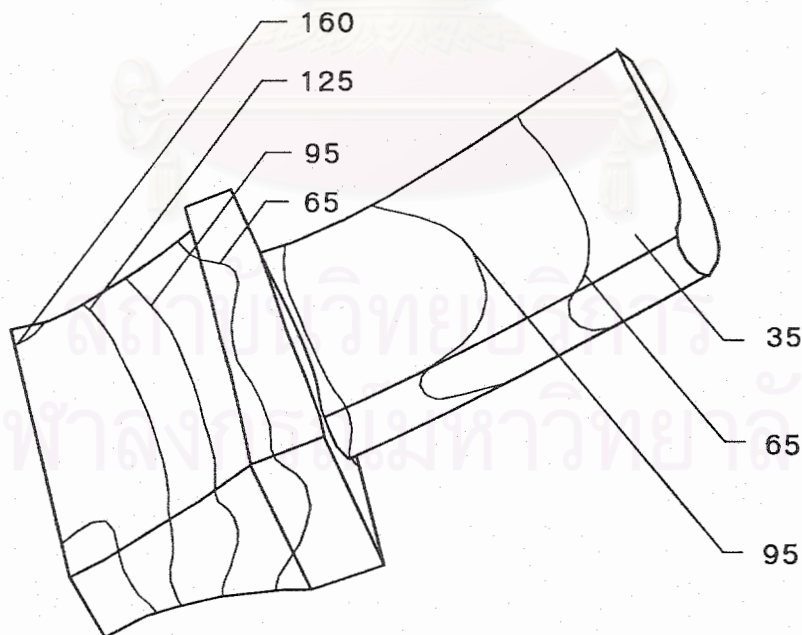
5.20



รูปที่ 5.20 ไบพัดก๊าชเทอร์ไบน์ภายใต้ความเร็วเชิงมุมคงที่รอบแกน z

โดยแรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยความเร็วเชิงมุม ω ดังแสดงในรูปที่ 5.20 นั้น มีค่าเป็น 3000 rpm หรือ 314.16 rad/s

หลังจากทำการคำนวณปัญหาในรูปที่ 5.20 ด้วยโปรแกรม SOLID3D ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการเสียรูปและความเค้นแบบ Von Mises ดังแสดงในรูปที่ 5.21

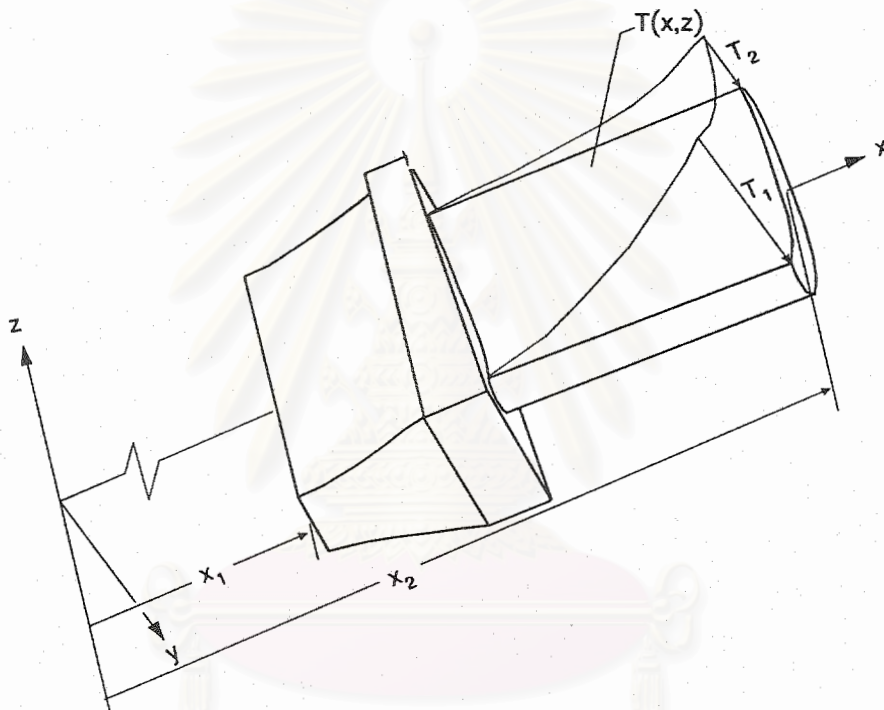


รูปที่ 5.21 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m² และการเสียรูปที่เกิดขึ้นกับไบพัดก๊าชเทอร์ไบน์ภายใต้ความเร็วเชิงมุมคงที่รอบแกน z ดังแสดงในรูปที่ 5.20

รูปที่ 5.21 แสดงถึงการเสียรูปนั้นเป็นไปในลักษณะที่ทำให้จุดรวมน้ำหนักของวัตถุ (Center of Mass) อยู่ในแนวเดียวกับแนวแรงเหวี่ยง เห็นได้อย่างค่อนข้างชัดเจน ส่วนความเค้นที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงเหวี่ยงรอบตัวเองพบว่า มีความเค้นสูงบริเวณฐานของใบพัดและที่โคนของใบพัด

5.7.3ค) ใบพัดก๊าซเทอร์โบในภายใต้อุณหภูมิ

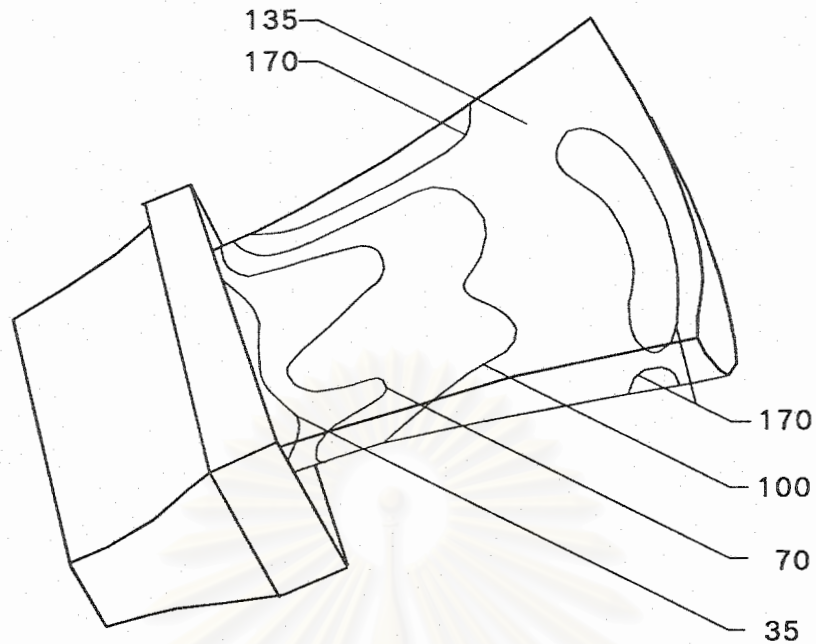
ลักษณะของอุณหภูมิที่กระทำบนใบพัดแสดงได้ดังรูปที่ 5.22



รูปที่ 5.22 ใบพัดก๊าซเทอร์โบในภายใต้อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x และแกน z

ลักษณะของอุณหภูมิที่กระทำบนใบพัดได้แสดงในรูปที่ 5.22 ซึ่งมีการกระจายในรูปแบบของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลที่แปรผันตามแกน x และแกน z โดยมี $T_1 = 850^\circ\text{C}$ และ $T_2 = 700^\circ\text{C}$

หลังจากทำการคำนวณปัญหาดังกล่าวด้วยโปรแกรม SOLID3D แล้ว ก่อให้เกิดผลลัพธ์ของการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises และการเสียรูป ดังแสดงในรูปที่ 5.23



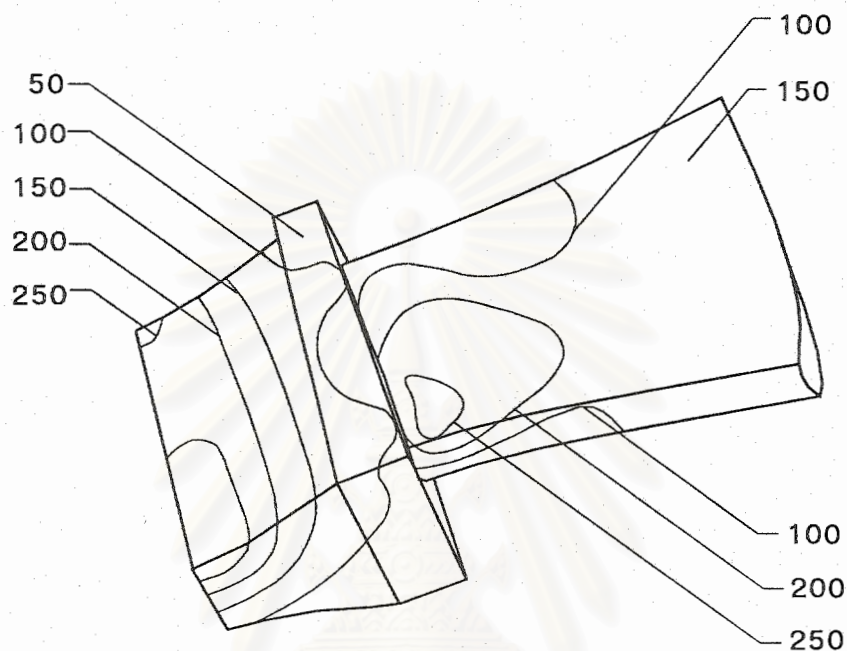
รูปที่ 5.23 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นกับใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ ภายใต้อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x และแกน z ดังแสดงในรูปที่ 5.22

จากผลการคำนวณในรูปที่ 5.23 เมื่อพิจารณาจะพบว่าลักษณะความเค้นสูงกระจายอยู่ทั่วใบพัด ลักษณะเช่นนี้เป็นผลมาจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมินั้นค่อนข้างสูง เหตุนี้เองทำให้การออกแบบก๊าซเทอร์ไบน์ในความเป็นจริง จะมีรูเล็ก ๆ กระจายความร้อนจากฐานใบพัด (Base) จนถึงโคนใบพัด (Tip) เพื่อช่วยลดอุณหภูมิ และลดอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ทำให้สามารถลดความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิได้ สำหรับการวิเคราะห์ในที่นี้ผู้วิจัยไม่ได้สร้างแบบจำลองให้มีรูระบายภายใน เนื่องจากหากจะจำลองเช่นนั้นจะต้องมีการสร้างเอลิเมนต์ และจุดต่อเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมาก ซึ่งมีผลโดยตรงต่อการคำนวณ เนื่องจากต้องการหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่สูงมาก

5.7.3ง) ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้ความดัน แรงเหวี่ยงรอบตัว และอุณหภูมิกระทำร่วมกัน

ในสภาวะการทำงานจริง ใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์จะทำงานภายใต้สภาวะร่วมกันระหว่าง ความดันในหัวข้อ 5.7.3ก แรงเหวี่ยงรอบตัวเองด้วยอัตราเร็วเชิงมุมคงที่รอบแกน x ในหัวข้อ 5.7.3ข และอุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x และ z ในหัวข้อ 5.7.3ค

หลังจากทำการคำนวณใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ภายใต้สภาวะร่วมกันดังกล่าว ด้วยโปรแกรม SOLID3D แล้ว จะได้ลักษณะการกระจายความเค้นแบบ Von Mises และการเสียรูป ดังแสดงในรูปที่ 5.24 ซึ่งแสดงถึงความเค้นสูงที่บริเวณโคนของใบพัดและบริเวณฐานของใบพัด (250 MN/m^2)



รูปที่ 5.24 ลักษณะการกระจายของความเค้นแบบ Von Mises, MN/m^2 และการเสียรูปที่เกิดขึ้นบนใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ เมื่อทำงานภายใต้สภาวะร่วมกันระหว่างความดันคงที่ รูปที่ 5.18 อัตราเร็วเชิงมุมคงที่ รูปที่ 5.20 และ อุณหภูมิซึ่งแปรผันตามแกน x รูปที่ 5.22

จากการวิเคราะห์หาค่าการเสียรูปและความเค้นในปัญหาตัวอย่างในใบพัดกังหันไอน้ำ และใบพัดก๊าซเทอร์ไบน์ ทำให้ทราบถึงตำแหน่งที่ควรระวังในการเกิดความเสียหาย นำไปสู่ประโยชน์การปรับปรุงสภาวะการทำงาน หรือทำนายอายุใช้งาน ในขณะเดียวกันโปรแกรม SOLID3D ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ สามารถนำไปคำนวณหาค่าการเสียรูปและความเค้นของของแข็งทรงตันในรูปทรงอื่น ที่มีสภาวะการทำงานภายใต้ความดัน อุณหภูมิแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง หรือมีแรงกระทำที่ตำแหน่งต่างๆ ได้เช่นเดียวกัน

บทที่ 6

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

เนื้อหาของรายงานการวิจัยนี้เริ่มจากการอธิบายถึงความสำคัญและที่มาของโครงการวิจัย ซึ่งมีจุดประสงค์หลักเพื่อคำนวณการเสียรูปและความเค้นของใบพัดกังหันไอน้ำด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยลักษณะของปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาของแข็งที่มีรูปร่างซับซ้อนใดๆในสามมิติ และทำงานภายใต้สภาวะเงื่อนไขขอบเขตที่ต่าง ๆ กัน ดังนั้น เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหลักการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้อย่างท่องแท้เป็นขั้นเป็นตอน จึงได้ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันขึ้น โดยเริ่มจากปัญหาของแข็งหนึ่งมิติในบทที่ 3 ปัญหาสองมิติในบทที่ 4 และปัญหาสามมิติในบทที่ 5 ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์ปัญหาใบพัดกังหันไอน้ำที่มีรูปร่างซับซ้อนได้

สำหรับบทที่ 3 ซึ่งเป็นปัญหาของแข็งในหนึ่งมิตินั้น เป็นการวิเคราะห์การเสียรูปของแผ่นวงแหวนบางที่มีการกระจายของอุณหภูมิในแนวรัศมี หลังจากที่ได้ทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันขึ้นมาแล้ว ได้นำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมไปตรวจสอบกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหานี้ ก่อให้เกิดแนวคิดในการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ การเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่เหมาะสมนี้ นอกจากจะช่วยลดจำนวนเอลิเมนต์และจุดต่อที่จำเป็นต้องใช้ในการวิเคราะห์ปัญหานั้นแล้ว ยังช่วยเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ให้สูงมากยิ่งขึ้น แนวคิดที่เกิดขึ้นสำหรับการวิเคราะห์ในบทที่ 3 นี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิศวกรรมทางด้านอื่นๆที่นอกเหนือไปจากทางด้านของแข็งตามที่อธิบายในรายงานการวิจัยนี้

แนวคิดและความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในบทที่ 3 ได้ก่อให้เกิดความเข้าใจและความมั่นใจในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาในสองมิติที่มีความซับซ้อนมากขึ้น บทที่ 4 ได้แสดงการวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นของปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนภายใต้ความดัน อุณหภูมิ และแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ผลลัพธ์ที่ได้จากการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์จากบทนี้ ได้นำมาตรวจสอบกับผลเฉลยแม่นยำตรงสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างอย่างง่ายก่อนนำไปประยุกต์กับปัญหาสมมาตรรอบแกนที่มีรูปร่างซับซ้อน นอกจากนั้น ยังพบว่าแนวคิดในการแก้ปัญหาสมมาตรรอบแกนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้มีความเที่ยงตรงมากกว่าและยุ่งยากน้อยกว่าระเบียบวิธีแบบเดิม (Classical method) หลายๆระเบียบวิธีที่เคยใช้กันในอดีต

การวิเคราะห์ปัญหาที่มีความสมมาตรรอบแกนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทที่ 4 นี้ เป็นแนวทางไปสู่การประดิษฐ์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทที่ 5 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นของปัญหาของแข็งรูปร่างซับซ้อนใดๆในสามมิติ ภายใต้ความดัน อุณหภูมิ และแรงเหวี่ยงรอบตัวเอง เนื้อหาในบทที่ 5 เริ่มจากประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์รวมทั้งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน จากนั้นจึงทำการตรวจสอบความถูกต้องของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น โดยเริ่มจากการนำไปแก้ปัญหามีผลเฉลยแม่นยำตรงก่อนนำไปประยุกต์ใช้วิเคราะห์หากการเสียรูปและความเค้นของใบพัดกังหันไอน้ำ ซึ่งทำงานภายใต้ความดัน แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง ที่อุณหภูมิสูง ผลจากการวิเคราะห์การเสียรูปและความเค้นของใบพัดกังหันไอน้ำนั้นช่วยให้วิศวกรเกิดความเข้าใจถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น และแนวทางการปรับปรุงสภาวะการทำงานเพื่อให้ใช้งานได้นานขึ้น ในขณะที่เดียวกันการวิเคราะห์ในบทที่ 5 นี้ ไม่ได้จำกัดอยู่เพียงปัญหาใบพัดกังหันไอน้ำเท่านั้น ปัญหาของแข็งในสามมิติที่มีรูปทรงตันทั่วไปอย่างอื่น ซึ่งทำงานภายใต้สภาวะความดัน แรงเหวี่ยงรอบตัวเอง อุณหภูมิ แรงกระทำที่ตำแหน่งต่างๆ หรืออย่างใดอย่างหนึ่งก็สามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 5 วิเคราะห์ได้เช่นกัน

6.2 ข้อเสนอแนะ

ปัญหาหลักที่พบในขณะที่ทำการคำนวณโดยเฉพาะปัญหาที่มีรูปทรงซับซ้อนในสามมิติ คือ ปัญหาหน่วยความจำไม่เพียงพออันเนื่องมาจากการแบ่งเอลิเมนต์และจุดต่อจำนวนมากเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แม่นยำยิ่งขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้เสนอแนวทางในการลดปัญหาหน่วยความจำไม่เพียงพอออกเป็นสองแนวทาง ดังนี้

แนวทางแก้ปัญหาวิธีแรก คือการพยายามลดค่าครึ่งของความกว้างแถบ (Half-bandwidth) ซึ่งค่าครึ่งของความกว้างแถบนี้จะขึ้นอยู่กับการเรียงหมายเลขของจุดต่อโดยค่าแตกต่างที่สูงสุดระหว่างหมายเลขของจุดต่อที่อยู่ติดกันจะเป็นตัวกำหนดขนาดของครึ่งของความกว้างแถบ ทางแก้ไขที่จะลดค่าครึ่งของความกว้างแถบก็คือ การใช้โปรแกรมเพื่อเรียงหมายเลขจุดต่อใหม่ (Renumbering) ให้มีค่าแตกต่างระหว่างหมายเลขของจุดต่อที่อยู่ติดกันมีค่าน้อยลง ผลการลดค่าครึ่งของความกว้างแถบจะช่วยให้เมตริกซ์ในการคำนวณมีขนาดลดลงมาก ช่วยให้การใช้หน่วยความจำน้อยลง และช่วยลดเวลาในการคำนวณลงด้วย

ส่วนแนวทางแก้ปัญหาอีกวิธีหนึ่ง คือการพยายามลดขนาดของจำนวนเอลิเมนต์ โดยการใช้ระเบียบวิธีการจัดขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (Remeshing technique) ซึ่งเทคนิคของวิธีการนี้คือการใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นน้อย เพื่อช่วยลดปริมาณของหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และขณะเดียวกันคือการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสูงเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่า ขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่อธิบายโดยละเอียดในรายงานฉบับสมบูรณ์นี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการวิเคราะห์ปัญหาการเสียรูปและความเค้นที่เกิดขึ้นในของแข็งรูปทรงซับซ้อนใดๆ ในขณะเดียวกัน แนวคิดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว สามารถนำไปประยุกต์เพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาทางวิศวกรรมด้านอื่นๆ เช่น นำไปประยุกต์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาของการไหล ซึ่งอาจเป็นการไหลผ่านรูปทรงของรถยนต์หรือการไหลหมุนเวียนของอากาศในห้อง เป็นต้น นอกจากนี้ ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นและได้อธิบายโดยละเอียดในรายงานวิจัยนี้ สามารถนำไปใช้เป็นต้นแบบเพื่อประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการทำวิทยานิพนธ์เพื่อใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ รวมทั้งการทำงานวิจัยในระดับสูงขึ้นไป



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บรรณานุกรม

ภาษาไทย

ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2537.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม, กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2538.

ภาษาอังกฤษ

Boley, B. A., Weiner, J. H., Theory of Thermal Stresses, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

Chandrupatla, T. R., Belegundu, A. D., Introduction to Finite Elements in Engineering, Prentice-Hall International, Inc., New Jersey, 1991.

Church, E. F., Steam Turbines, 3rd Ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.

Clough, R. W. and Rashid, Y., "Finite Element Analysis of Axisymmetric Solid," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 91, 1985, pp. 71-85.

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd Ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

Dunavant, D. A., "High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for Triangular Finite Element," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, No. 7, 1985, pp. 642-654.

Emery, A. F. and Carson, W. W., "An Evaluation of the Use of the Finite Element Method in the Computation of Temperature," Journal of Heat Transfer, 1971, pp. 136-145.

- Hildebrand, F. B., Advanced Calculus for Applications, 2nd Ed., Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- Hoffman, O., Sachs G., Introduction to Theory of Plasticity for Engineer, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
- Huebner, K. H., Thornton, E. A., The Finite Element Method for Engineers, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, 1982.
- Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Introduction to Heat Transfer, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, 1985.
- Johns, D. J., Thermal Stress Analyses, Pergamon Press Ltd., 1965.
- Logan, D. L., A First Course in the Finite Element Method, PWS Publishing Company, Boston, 1993.
- Nyhoff, L., Leestma, S., FORTRAN77 and Numerical Methods for Engineers and Scientists, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1995.
- Reddy, C. T. and Shippy, D. J., "Alternative Integration Formulae for Triangular Finite Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 1981, pp. 133-139.
- Silvester, P. and Konard, A., "Axisymmetric Triangular Finite Element for the Scalar Helmholtz Equation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 1973, pp. 481-498.
- Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., Theory of Elasticity, 3rd Ed., McGraw-Hill International Edition, Singapore, 1970.
- Ugural, A. C., Fenster, S. K., Advanced Strength and Applied Elasticity, Elsevier, New York, 1977.
- Wilson, E. L., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids," AIAA Journal, Vol. 3, No. 12, pp. 2269-2274.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของโปรแกรม DISEXACT

รายละเอียดของโปรแกรม DISEXACT

โปรแกรม DISEXACT จะมีรายละเอียดเริ่มจากโปรแกรมหลักและตามด้วย โปรแกรมย่อย
ต่างๆทั้งหมดดังนี้

```
*****
c A FINITE ELEMENT PROGRAM
c FOR SOLVING 1-D ANNULAR DISK WITH RADIAL TEMPERATURE VARIATION
c FOR  $T(r) = a+b*\ln(r)$  WITH EXACT  $U(r)$  INTERPOLATION FUNCTION
c
c     MXELE = maximum number of elements in model (can be adjusted)
c     MXPOI = maximum number of nodes in model (can be adjusted)
c
*****
PARAMETER (MXELE=100,MXPOI=101)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION U(MXPOI),STR(MXPOI),UR(MXPOI),T(MXPOI)
DIMENSION SYSK(MXPOI,MXPOI),SYSA(MXPOI),BNEW(MXPOI),R(MXPOI)
CHARACTER*20 NAME1,NAME2
INTEGER IBC(MXPOI)
c
10 WRITE(6,20)
20 FORMAT(/,'**FINITE ELEMENT FOR SOLVING ANNULAR DISK WITH RADIAL
*TEMP VARIATION PROBLEM**',/, ' WITH  $T(r) = a+b*\ln(r)$  ',/,
*' PLEASE INPUT THE FILE NAME OF INPUT DATA:',/)
READ(5, '(A)',ERR=10) NAME1
OPEN(UNIT=7,FILE=NAME1,STATUS='OLD',ERR=10)
c
c read title of computation:
READ(7,*) NLines
DO 100 ILines = 1,NLines
READ(7,1) TEXT
1 FORMAT(20A4)
100 CONTINUE
c
c ----- read input data -----
READ(7,1) TEXT
READ(7,*) NE,NP,NFIX
IF(NE.GT.MXELE) WRITE(6,110)NE
110 FORMAT(/,'PLEASE INCREASE MXELE TO',I5)
IF(NE.GT.MXELE) STOP
IF(NP.GT.MXPOI) WRITE(6,120)NP
120 FORMAT(/,'PLEASE INCREASE MXPOI TO',I5)
IF(NP.GT.MXPOI) STOP
READ(7,1) TEXT
READ(7,*) AL,E,PR,TREF,PI,PO,TI,TO
c read the boundary condition (if IBC=0 U(I) not )
c                               (if IBC=1 U(I) fix )
c set matric to zero
DO 130 I=1,NP
STR(I)=0
U(I)=0
IBC(I)=0
130 CONTINUE
c
c
READ(7,1) TEXT
DO 131 IB = 1,NP
READ(7,*) IP,R(IB)
IF(IP.NE.IB) WRITE(6,132) IB
```

```

132   FORMAT(/,'**ERROR**  NODE',I5,'IN DATA FILE WAS MISSING')
      STR(1) = PI
      STR(NP) = PO
131 CONTINUE
      DO 135 I=1,NP
         T(I)=LOG(R(I)/R(NP))/LOG(R(1)/R(NP))*TI+LOG(R(1)/R(I))/
         *LOG(R(1)/R(NP))*TO
135 CONTINUE
      IF(NFIX.EQ.0) GO TO 133
      READ(7,1) TEXT
      DO 134 IF=1,NFIX
         READ(7,*) IFIX
         IBC(IFIX)=1
134 CONTINUE
c
c ----- processing -----
c
133 WRITE(6,200) NP,NE
200 FORMAT(/,'**THE MODEL CONSISTS OF',I5,' NODES',I5,' ELEMENTS**')
c
c establish all element matrices and assemble them to form system equation
c
      WRITE(6,210)
210 FORMAT(/,'**ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND'
      *,' ASSEMBLE THEM TO SYSTEM EQUATION**')
      CALL ELE(NP,MXPOI,PR,AL,STR,SYSK,SYSA,T,R,TREF,E)
c
c apply boundary condition and set them to be new matrix to solve
c
      WRITE(6,220)
220 FORMAT(/,'**APPLYING BOUNDARY CONDITION OF NODAL ',/,
      *' AND FORMING SET OF NEW MATRICES TO BE SOLVED**')
      CALL APPLYBC(IBC,NP,MXPOI,U,SYSA,SYSK,BNEW)
c
c solve with gauss
c
      WRITE(6,230)
230 FORMAT(/,'** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS **')
      WRITE(6,231) NP
231 FORMAT(5X,'TOTAL OF',I5,' EQUATIONS TO BE SOLVED')
      CALL GAUSS(NP,SYSK,BNEW,UR,MXPOI)
c
c ----- print out nodal solution -----
c
300 WRITE(6,310)
310 FORMAT(/,' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISP. SOLUTION:'
      *,/)
      READ(5,'(A)',ERR=300) NAME2
      OPEN(UNIT=8,FILE=NAME2,STATUS='NEW',ERR=300)
      WRITE(8,320) NP
320 FORMAT('NODAL SOLUTION[',I5,']',/,2X,'NODE',10X,'U',/)
      DO 330 IP=1,NP
         WRITE(8,340) IP,UR(IP)
340   FORMAT(I6,2E14.6)
330 CONTINUE
      STOP
      END
*****
c
      SUBROUTINE ELE(NP,MXPOI,PR,AL,STR,SYSK,SYSA,T,R,TREF,E)
c
c establish all element matrices and assemble them to system equation
c
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION AK(2,2), AE(2), STR(MXPOI), T(MXPOI),R(MXPOI)
      DIMENSION SYSK(MXPOI,MXPOI),SYSA(MXPOI)
c
c set value in matrix sys to zero

```

```

DO 110 IR = 1,NP
  DO 120 IC = 1,NP
    SYSK(IR,IC) = 0
    SYSA(IR) = 0
  120 CONTINUE
110 CONTINUE
c
c loop over the number of elements
  DO 100 IE = 1,NE
    R1 = R(IE)
    R2 = R(IE+1)
    T1 = T(IE)
    T2 = T(IE+1)
    C = (T1-T2)/log(R1/R2)
  c
  c find element matrix [K]e
  c
    SP = 1/(1-PR**2)
    SR = (R2**2-R1**2)
  c
    AK(1,1) = SP*(2*R1/SR+(1-PR)/R1)
    AK(1,2) = SP*(-2*R2/SR)
    AK(2,1) = SP*(-2*R1/SR)
    AK(2,2) = SP*(2*R2/SR-(1-PR)/R2)
  c
    I1=IE
    I2=IE+1
    AE(1) = AL*C/(2*(1-PR)*SR)*(2*R2**2*log(R1/R2)+SR)-STR(I1)/E
    *-AL/(1-PR)*(T1-TREF)
    AE(2) = -AL*C/(2*(1-PR)*SR)*(2*R1**2*log(R1/R2)+SR)+STR(I2)/E
    **AL/(1-PR)*(T2-TREF)
  c
  c assemble these element equations
  c
    CALL ASSMBLE(IE,AK,AE,MXPOI,SYSK,SYSA)
  c
  100 CONTINUE
  RETURN
  END
*****
  SUBROUTINE ASSMBLE(IE,AK,AE,MXPOI,SYSK,SYSA)
  c
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION AK(2,2), AE(2)
  DIMENSION SYSK(MXPOI,MXPOI), SYSA(MXPOI)
  c
  NNODE = 2
  DO 1000 IR = 1,NNODE
    DO 2000 IC =1,NNODE
      IROW = IE+(IR-1)
      ICOL = IE+(IC-1)
      SYSK(IROW,ICOL) = SYSK(IROW,ICOL)+AK(IR,IC)
    2000 CONTINUE
    SYSA(IROW) = SYSA(IROW)+AE(IR)
  1000 CONTINUE
  RETURN
  END
*****
  SUBROUTINE APPLYBC(IBC,NP,MXPOI,U,SYSA,SYSK,BNEW)
  c
  c set new matrix to be solved
  c
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION U(MXPOI),BNEW(MXPOI)
  DIMENSION SYSK(MXPOI,MXPOI),SYSA(MXPOI)
  INTEGER IBC(MXPOI)
  c
  c change only IBC = 1 (known value of u)
  c

```

```

DO 100 IR = 1,NP
  IF(IBC(IR).EQ.0) GO TO 100
  DO 200 IC =1,NP
    SYSK(IR,IC) = 0
200  CONTINUE
    BNEW(IR) = U(IR)
    SYSK(IR,IR) = 1
100 CONTINUE
C
C for only IBC = 0 (known value of stress)
C
DO 300 IR = 1,NP
  IF(IBC(IR).EQ.1) GO TO 300
  BNEW(IR) = SYSA(IR)
  DO 400 IC = 1,NP
    IF(IBC(IC).EQ.0) GO TO 400
    BNEW(IR) = BNEW(IR) - SYSK(IR,IC) * U(IC)
    SYSK(IR,IC) = 0
400  CONTINUE
300 CONTINUE
RETURN
END
*****
C
SUBROUTINE GAUSS(N, A, B, X, MXPOI)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXPOI,MXPOI), B(MXPOI), X(MXPOI)
C
C PERFORM SCALING:
C
CALL SCALE(N, A, B, MXPOI)
C
C FORWARD ELIMINATION:
C
PERFORM ACCORDING TO ORDER OF 'PRIME' FROM 1 TO N-1:
C
DO 100 IP=1,N-1
C
C PERFORM PARTIAL PIVOTING:
C
CALL PIVOT(N, A, B, MXPOI, IP)
C
C LOOP OVER EACH EQUATION STARTING FROM THE ONE THAT CORRESPONDS
C WITH THE ORDER OF 'PRIME' PLUS ONE:
C
DO 200 IE=IP+1,N
  RATIO = A(IE,IP)/A(IP,IP)
C
C COMPUTE NEW COEFFICIENTS OF THE EQUATION CONSIDERED:
C
DO 300 IC=IP+1,N
  A(IE,IC) = A(IE,IC) - RATIO*A(IP,IC)
300 CONTINUE
  B(IE) = B(IE) - RATIO*B(IP)
200 CONTINUE
C
C SET COEFFICIENTS ON LOWER LEFT PORTION TO ZERO:
C
DO 400 IE=IP+1,N
  A(IE,IP) = 0.
400 CONTINUE
100 CONTINUE
C
C BACK SUBSTITUTION:
C
C COMPUTE SOLUTION OF THE LAST EQUATION:
C
X(N) = B(N)/A(N,N)
C

```

C THEN COMPUTE SOLUTIONS FROM EQUATION N-1 TO 1:

C

```

DO 500 IE=N-1,1,-1
SUM = 0.
DO 600 IC=IE+1,N
SUM = SUM + A(IE,IC)*X(IC)
600 CONTINUE
X(IE) = (B(IE) - SUM)/A(IE,IE)
500 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C-----

C

```

SUBROUTINE PIVOT(N, A, B, MXPOI, IP)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXPOI,MXPOI), B(MXPOI)

```

C

C

C

PERFORM PARTIAL PIVOTING:

```

JP = IP
BIG = ABS(A(IP,IP))
DO 10 I=IP+1,N
AMAX = ABS(A(I,IP))
IF (AMAX.GT.BIG) THEN
    BIG = AMAX
    JP = I
ENDIF
10 CONTINUE
IF (JP.NE.IP) THEN
DO 20 J=IP,N
DUMY = A(JP,J)
A(JP,J) = A(IP,J)
A(IP,J) = DUMY
20 CONTINUE
DUMY = B(JP)
B(JP) = B(IP)
B(IP) = DUMY
ENDIF
RETURN
END

```

C

C-----

C

```

SUBROUTINE SCALE(N, A, B, MXPOI)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXPOI,MXPOI), B(MXPOI)

```

C

C

C

```

DO 10 IE=1,N
BIG = ABS(A(IE,1))
DO 20 IC=2,N
AMAX = ABS(A(IE,IC))
IF (AMAX.GT.BIG) BIG = AMAX
20 CONTINUE
DO 30 IC=1,N
A(IE,IC) = A(IE,IC)/BIG
30 CONTINUE
B(IE) = B(IE)/BIG
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C-----

รายละเอียดของโปรแกรม DISLNEAR

รายละเอียดของโปรแกรม DISLNEAR

โปรแกรม DISLNEAR จะมีรายละเอียดเริ่มจากโปรแกรมหลักและตามด้วย โปรแกรมย่อยต่างๆทั้งหมดดังนี้

```
*****
c A FINITE ELEMENT PROGRAM
c FOR SOLVING 1-D ANNULAR DISK WITH RADIAL TEMPERATURE VARIATION
c FOR OVERALL  $T(r) = a+b\ln(r)$ 
c WITH LINEAR  $U(r)$  AND  $T(r)$  INTERPOLATION FUNCTION IN EACH ELEMENT
c
c     MXELE = maximum number of elements in model (can be adjusted)
c     MXPOI = maximum number of nodes in model (can be adjusted)
c
*****
PARAMETER (MXELE=100,MXPOI=101)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION U(MXPOI),STR(MXPOI),UR(MXPOI),T(MXPOI)
DIMENSION SYSK(MXPOI,MXPOI),SYSA(MXPOI),BNEW(MXPOI),R(MXPOI)
CHARACTER*20 NAME1,NAME2
INTEGER IBC(MXPOI)
c
10 WRITE(6,20)
20 FORMAT(/,'**FINITE ELEMENT FOR SOLVING ANNULAR DISK WITH RADIAL
*TEMP VARIATION PROBLEM**',/, ' WITH LINEAR TEMP AND DISP INTERPOLA
*TION ',/, ' PLEASE INPUT THE FILE NAME OF INPUT DATA:',/)
READ(5, '(A)',ERR=10) NAME1
OPEN(UNIT=7,FILE=NAME1,STATUS='OLD',ERR=10)
c
c read title of computation:
READ(7,*) NLines
DO 100 ILines = 1,NLines
READ(7,1) TEXT
1 FORMAT(20A4)
100 CONTINUE
c
c ----- read input data -----
READ(7,1) TEXT
READ(7,*) NE,NP,NFIX
IF(NE.GT.MXELE) WRITE(6,110)NE
110 FORMAT(/,'PLEASE INCREASE MXELE TO',I5)
IF(NE.GT.MXELE) STOP
IF(NP.GT.MXPOI) WRITE(6,120)NP
120 FORMAT(/,'PLEASE INCREASE MXPOI TO',I5)
IF(NP.GT.MXPOI) STOP
READ(7,1) TEXT
READ(7,*) AL,E,PR,TREF,PI,PO,TI,TO
c read the boundary condition (if IBC=0 U(I) not )
c (if IBC=1 U(I) fix )
c set matrix to zero
DO 130 I=1,NP
STR(I)=0
U(I)=0
IBC(I)=0
130 CONTINUE
c
c
READ(7,1) TEXT
DO 131 IB = 1,NP
READ(7,*) IP,R(IB)
IF(IP.NE.IB) WRITE(6,132) IB
```

```

132   FORMAT(/, '**ERROR**  NODE', I5, ' IN DATA FILE WAS MISSING')
      STR(1) = PI
      STR(NP) = PO
131 CONTINUE
      DO 135 I=1, NP
        T(I) = LOG(R(I)/R(NP)) / LOG(R(1)/R(NP)) * TI + LOG(R(1)/R(I)) /
          * LOG(R(1)/R(NP)) * TO
135 CONTINUE
      IF(NFIX.EQ.0) GO TO 133
      READ(7,1) TEXT
      DO 134 IF=1, NFIX
        READ(7,*) IFIX
        IBC(IFIX)=1
134 CONTINUE
c
c ----- processing -----
c
133 WRITE(6,200) NP, NE
200 FORMAT(/, '**THE MODEL CONSISTS OF', I5, ' NODES', I5, ' ELEMENTS**')
c
c establish all element matrices and assemble them to form system equation
c
      WRITE(6,210)
210 FORMAT(/, '**ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND'
          * ,/, ' ASSEMBLE THEM TO SYSTEM EQUATION**')
      CALL ELE(NP, NP, MXPOI, PR, AL, STR, SYSK, SYSA, T, R, TREF, E)
c
c apply boundary condition and set them to be new matrix to solve
c
      WRITE(6,220)
220 FORMAT(/, '**APPLYING BOUNDARY CONDITION OF NODAL ',/,
          * ' AND FORMING SET OF NEW MATRICES TO BE SOLVED**')
      CALL APPLYBC(IBC, NP, MXPOI, U, SYSA, SYSK, BNEW)
c
c solve with gauss
c
      WRITE(6,230)
230 FORMAT(/, '** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS **')
      WRITE(6,231) NP
231 FORMAT(5X, 'TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS TO BE SOLVED')
      CALL GAUSS(NP, SYSK, BNEW, UR, MXPOI)
c
c ----- print out nodal solution -----
c
300 WRITE(6,310)
310 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISP. SOLUTION:'
          * ,/)
      READ(5, '(A)', ERR=300) NAME2
      OPEN(UNIT=8, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=300)
      WRITE(8,320) NP
320 FORMAT('NODAL SOLUTION[' , I5, ']',/,/, 2X, 'NODE', I5, 'U',/,/)
      DO 330 IP=1, NP
        WRITE(8,340) IP, UR(IP)
340   FORMAT(I6, 2E14.6)
330 CONTINUE
      STOP
      END
*****
c
      SUBROUTINE ELE(NP, NP, MXPOI, PR, AL, STR, SYSK, SYSA, T, R, TREF, E)
c
c establish all element matrices and assemble them to system equation
c
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION AK(2,2), AE(2), STR(MXPOI), T(MXPOI), R(MXPOI)
      DIMENSION SYSK(MXPOI, MXPOI), SYSA(MXPOI)
c
c set value in matrix sys to zero

```

```

DO 110 IR = 1,NP
  DO 120 IC = 1,NP
    SYSK(IR,IC) = 0
    SYSA(IR) = 0
  120 CONTINUE
  110 CONTINUE
C
C loop over the number of elements
  DO 100 IE = 1,NE
    R1 = R(IE)
    R2 = R(IE+1)
    T1 = T(IE)
    T2 = T(IE+1)
  C
  C find element matrix [K]e
  C
    SP = 1./(1-PR**2)
    SR = (R2-R1)**2
  C
    AK(1,1) = SP*((2.*(R2-R1)-R2*LOG(R2/R1))/SR+(1-PR)/R1)
    AK(1,2) = SP*((2.*(R1-R2)-R1*LOG(R1/R2))/SR)
    AK(2,1) = SP*((2.*(R1-R2)+R2*LOG(R2/R1))/SR)
    AK(2,2) = SP*((2.*(R2-R1)+R1*LOG(R1/R2))/SR-(1-PR)/R2)
  C
    I1=IE
    I2=IE+1
    AE(1) = -AL*((T1-TREF)+(T2-TREF))/(2.*(1-PR))-STR(I1)/E
    AE(2) = AL*((T1-TREF)+(T2-TREF))/(2.*(1-PR))+STR(I2)/E
  C
  C assemble these element equations
  C
    CALL ASSEMBLE(IE,AK,AE,MXPOI,SYSK,SYSA)
  C
  100 CONTINUE
  RETURN
  END
*****
SUBROUTINE ASSEMBLE(IE,AK,AE,MXPOI,SYSK,SYSA)
C
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION AK(2,2), AE(2)
  DIMENSION SYSK(MXPOI,MXPOI),SYSA(MXPOI)
C
  NNODE = 2
  DO 1000 IR = 1,NNODE
    DO 2000 IC =1,NNODE
      IROW = IE+(IR-1)
      ICOL = IE+(IC-1)
      SYSK(IROW,ICOL) = SYSK(IROW,ICOL)+AK(IR,IC)
    2000 CONTINUE
    SYSA(IROW) = SYSA(IROW)+AE(IR)
  1000 CONTINUE
  RETURN
  END
*****
SUBROUTINE APPLYBC(IBC,NP,MXPOI,U,SYSA,SYSK,BNEW)
C
C set new matrix to be solved
C
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION U(MXPOI),BNEW(MXPOI)
  DIMENSION SYSK(MXPOI,MXPOI),SYSA(MXPOI)
  INTEGER IBC(MXPOI)
C
C change only IBC = 1 (known value of u)
C
  DO 100 IR = 1,NP
    IF(IBC(IR).EQ.0) GO TO 100
    DO 200 IC =1,NP

```

```

        SYSK(IR,IC) = 0
200    CONTINUE
        BNEW(IR) = U(IR)
        SYSK(IR,IR) = 1
100    CONTINUE
c
c for only IBC = 0 (known value of stress)
c
        DO 300 IR = 1,NP
            IF(IBC(IR).EQ.1) GO TO 300
            BNEW(IR) = SYSA(IR)
            DO 400 IC = 1,NP
                IF(IBC(IC).EQ.0) GO TO 400
                BNEW(IR) = BNEW(IR) - SYSK(IR,IC)*U(IC)
                SYSK(IR,IC) = 0
            400    CONTINUE
        300    CONTINUE
        RETURN
        END
*****
C
        SUBROUTINE GAUSS(N, A, B, X, MXPOI)
        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
        DIMENSION A(MXPOI,MXPOI), B(MXPOI), X(MXPOI)
C
C     PERFORM SCALING:
C
C     CALL SCALE(N, A, B, MXPOI)
C
C     FORWARD ELIMINATION:
C
C     PERFORM ACCORDING TO ORDER OF 'PRIME' FROM 1 TO N-1:
C
C     DO 100 IP=1,N-1
C
C     PERFORM PARTIAL PIVOTING:
C
C     CALL PIVOT(N, A, B, MXPOI, IP)
C
C     LOOP OVER EACH EQUATION STARTING FROM THE ONE THAT CORRESPONDS
C     WITH THE ORDER OF 'PRIME' PLUS ONE:
C
C     DO 200 IE=IP+1,N
C     RATIO = A(IE,IP)/A(IP,IP)
C
C     COMPUTE NEW COEFFICIENTS OF THE EQUATION CONSIDERED:
C
C     DO 300 IC=IP+1,N
C     A(IE,IC) = A(IE,IC) - RATIO*A(IP,IC)
300    CONTINUE
        B(IE) = B(IE) - RATIO*B(IP)
200    CONTINUE
C
C     SET COEFFICIENTS ON LOWER LEFT PORTION TO ZERO:
C
C     DO 400 IE=IP+1,N
C     A(IE,IP) = 0.
400    CONTINUE
100    CONTINUE
C
C     BACK SUBSTITUTION:
C
C     COMPUTE SOLUTION OF THE LAST EQUATION:
C
C     X(N) = B(N)/A(N,N)
C
C     THEN COMPUTE SOLUTIONS FROM EQUATION N-1 TO 1:
C
C     DO 500 IE=N-1,1,-1

```

```

SUM = 0.
DO 600 IC=IE+1,N
SUM = SUM + A(IE,IC)*X(IC)
600 CONTINUE
X(IE) = (B(IE) - SUM)/A(IE,IE)
500 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C-----

C

```

SUBROUTINE PIVOT(N, A, B, MXPOI, IP)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXPOI,MXPOI), B(MXPOI)

```

C

C

```

PERFORM PARTIAL PIVOTING:

```

C

```

JP = IP
BIG = ABS(A(IP,IP))
DO 10 I=IP+1,N
AMAX = ABS(A(I,IP))
IF (AMAX.GT.BIG) THEN
    BIG = AMAX
    JP = I
ENDIF
10 CONTINUE
IF (JP.NE.IP) THEN
DO 20 J=IP,N
DUMY = A(JP,J)
A(JP,J) = A(IP,J)
A(IP,J) = DUMY
20 CONTINUE
DUMY = B(JP)
B(JP) = B(IP)
B(IP) = DUMY
ENDIF
RETURN
END

```

C

C-----

C

```

SUBROUTINE SCALE(N, A, B, MXPOI)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXPOI,MXPOI), B(MXPOI)

```

C

C

```

PERFORM SCALING:

```

C

```

DO 10 IE=1,N
BIG = ABS(A(IE,1))
DO 20 IC=2,N
AMAX = ABS(A(IE,IC))
IF (AMAX.GT.BIG) BIG = AMAX
20 CONTINUE
DO 30 IC=1,N
A(IE,IC) = A(IE,IC)/BIG
30 CONTINUE
B(IE) = B(IE)/BIG
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C-----

```

*****

```

ภาคผนวก ข

รายละเอียดของโปรแกรม AXISSYM

รายละเอียดของโปรแกรม AXISSYM

โปรแกรม AXISSYM จะมีรายละเอียดเริ่มจากโปรแกรมหลักและตามด้วย โปรแกรมย่อย
ต่างๆทั้งหมดดังนี้

```
*****
*   PROGRAM  AXISSYM                               *
*   *                                               *
*   A FINITE ELEMENT MECHANICAL/THERMAL STRESS ANALYSIS PROGRAM *
*   FOR AXISYMETRIC PROBLEM (TWO-DIMENSIONAL) OPERATIONING UNDER *
*   PRESSURE, CENTRIFUGAL FORCE, BODY FORCE AND TEMPERATURE.      *
*****
C
C   THE VALUES DECLARED IN THE PARAMETER STATEMENT BELOW SHOULD
C   BE ASSIGNED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS
C
C   MXPOI = MAXIMUM NUMBER OF NODES IN THE MODEL
C   MXELE = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C   MXHBW = MAXIMUM NUMBER OF HALF-BANDWIDTH
C
C   COORDINATE IS R-Z-ZETA
C
C   PARAMETER (MXPOI=781, MXELE=1400, MXHBW=1556 )
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   REAL  COORD(MXPOI,2), TEMP(MXPOI)
C   REAL  PR1(MXELE), PZ1(MXELE)
C   REAL  PR2(MXELE), PZ2(MXELE)
C   REAL  SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
C   REAL  SRR(MXPOI), SZZ(MXPOI), SOO(MXPOI), SRZ(MXPOI), ONE(MXPOI)
C
C   CHARACTER*20  NAME1, NAME2, name4
C   CHARACTER*4   TEXT
C   CHARACTER*8   TEXT1
C
C   INTEGER INTMAT(MXELE,3), IBC(MXPOI,2)
C   INTEGER IEDGE1(MXELE,2), IEDGE2(MXELE,2), S(MXELE)
C
10  WRITE(6,15)
15  FORMAT(/, '**FINITE ELEMENT FOR SOLVING AXISYMETRIC PROBLEM**',/,
*   WITH PRESSURE TEMPERATURE AND CONSTANT ANGULAR VELOCITY',/,
*   PLEASE INPUT THE FILE NAME',/)
      READ(5, '(A)', ERR=10) NAME1
      OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C   READ TITLE OF COMPUTATION:
C
C   READ(7,*)  NLINES
C   DO 100  ILINE=1,NLINES
C   READ(7,1)  TEXT
1   FORMAT(A4)
100  CONTINUE
C
C   READ INPUT DATA:
C
C   READ(7,1)  TEXT
C   READ(7,*)  NPOIN, NELEM, NFORCE ,NSGROUP
C
C   IF(NPOIN.GT.MXPOI)  WRITE(6,110)  NPOIN
```

```

110 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOI TO ', I5)
    IF(NPOIN.GT.MXPOI) STOP
    IF(NELEM.GT.MXELE) WRITE(6,120) NELEM
120 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO ', I5)
C
    IF(NELEM.GT.MXELE) STOP
    READ(7,1) TEXT
    READ(7,*) ELAS, PR, DENS, ALPHA, TREF, ANGVEL, GRAV
    READ(7,1) TEXT
    DO 130 IP=1,NPOIN
    READ(7,*) I, (COORD(I,K), K=1,2)
C 2 FORMAT(T9,I8,T25,F8.0,T41,F8.0)
    IF(I.NE.IP) WRITE(6,135) IP
135 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
    IF(I.NE.IP) STOP
130 CONTINUE
C
    READ(7,1) TEXT
    DO 131 IP = 1,NPOIN
    READ(7,*) I, TEMP(I)
C 3 FORMAT(T17,I8,T25,F8.0)
    IF(I.NE.IP) WRITE(6,136) IP
136 FORMAT(/, ' NODAL TEMP. NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
    IF(I.NE.IP) STOP
131 CONTINUE
C
    DO 132 IP = 1,NPOIN
    DO 133 IC = 1,2
    IBC(IP,IC) = 0.
133 CONTINUE
132 CONTINUE
C
    READ(7,1) TEXT
134 READ(7,*) TEXT1, IPP, ISPC
C 141 FORMAT(T1,A8,T17,I8,T25,I8)
    IF(TEXT1.EQ.'ENDCONST') GO TO 137
C
C FIX FOR COORDINATE IN PLANE X-Z
C
    IF(ISPC.EQ.1) IBC(IPP,1) = 1
    IF(ISPC.EQ.3) IBC(IPP,2) = 1
C
    IF(ISPC.EQ.13) THEN
    IBC(IPP,1) = 1
    IBC(IPP,2) = 1
    ELSE
    ENDIF
    IF(TEXT1.NE.'ENDCONST') GO TO 134
C
137 READ(7,1) TEXT
C
    DO 140 IE=1,NELEM
    READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,3)
C 4 FORMAT(T9,I8,T25,I8,T41,I8,T57,I8)
    IF(I.NE.IE) WRITE(6,150) IE
150 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
    IF(I.NE.IE) STOP
140 CONTINUE
C
C NFORCE MEANS NUMBER OF NODES THAT SUPPORT THE EXTERNAL FORCE
C NEPRESS MEANS NUMBER OF ELEMENT THAT FACE TO PRESSURE
C
    DO 200 ISF=1,NELEM
    S(ISF) = 0
200 CONTINUE
C
    DO 205 IEP = 1,NELEM
    PR1(IEP) = 0.
    PR2(IEP) = 0.

```



```

PZ1(IEP) = 0.
PZ2(IEP) = 0.
DO 206 J = 1,2
    IEDGE1(IEP,J) = 0.
    IEDGE2(IEP,J) = 0.
206 CONTINUE
205 CONTINUE
    IF(NSGROUP.EQ.0) GO TO 240
C
DO 210 IG = 1,NSGROUP
    READ(7,1) TEXT
    READ(7,1) TEXT
220 READ(7,*) TEXT1, IEP, PRR, PZZ, N1, N2
    IF(TEXT1.EQ.'ENDGROUP') GO TO 210
    IF(S(IEP).EQ.0) THEN
        PRL(IEP) = PRR
        PZ1(IEP) = PZZ
        IEDGE1(IEP,1) = N1
        IEDGE1(IEP,2) = N2
    ELSE
        ENDIF
    IF(S(IEP).EQ.1) THEN
        PR2(IEP) = PRR
        PZ2(IEP) = PZZ
        IEDGE2(IEP,1) = N1
        IEDGE2(IEP,2) = N2
    ELSE
        ENDIF
    S(IEP) = S(IEP)+1
    IF(TEXT1.NE.'ENDGROUP') GO TO 220
210 CONTINUE
C
C
240 NDF = 2
    NDOF = 6
    NEQ = NPOIN*NDF
    DO 300 I=1,NEQ
        SYSF(I) = 0.
300 CONTINUE
    IF (NFORCE.EQ.0) GO TO 415
    READ(7,1) TEXT
    DO 310 II=1,NFORCE
        READ(7,*) N, FR, FZ
C
6 FORMAT(T17,I8,T41,F8.0,T57,F8.0)
        write(10,*) 'frfz=',n,fr,fz
        IEQ = (N-1)*NDF
        SYSF(IEQ+1) = FR
        write(10,*) fr
        SYSF(IEQ+2) = FZ
        write(10,*) fz
310 CONTINUE
C
C
C COMPUTE HALF-BANDWIDTH:
C
415 NHBW = 0
    DO 400 IE=1,NELEM
        MIN = 100000
        MAX = 0
        DO 410 IN=1,3
            II = INTMAT(IE,IN)
            IF(II.GT.MAX) MAX = II
            IF(II.LT.MIN) MIN = II
410 CONTINUE
        NDIF = MAX - MIN + 1
        IF(NDIF.GT.NHBW) NHBW = NDIF
400 CONTINUE
C
NHBW = NHBW*NDF
    IF(NHBW.GT.MXHBW) WRITE(6,420) NHBW

```



```

420 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXHBW TO ', I5)
    IF(NHBW.GT.MXHBW) STOP
C
    DO 430 I=1,NEQ
    DO 430 J=1,NHBW
    SYSK(I,J) = 0.
430 CONTINUE
    WRITE(6,435) NPOIN, NELEM
435 FORMAT(/, ' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5,
*      ' NODES AND', I5, ' ELEMENTS ***')
C
C   LOOP OVER ALL ELEMENTS TO COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE
C   THEM FOR SYSTEM MATRICES IN THE FORM NEEDED FOR MINIMUM MEMORY
C   REQUIREMENT:
C
    WRITE(6,440)
440 FORMAT(/, ' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
*      ' ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***' )
    CALL AXIS(NELEM, INTMAT, IEDGE1, IEDGE2, COORD, ELAS, PR, ALPHA,
*ANGVEL, GRAV, DENS, PR1, PZ1, PR2, PZ2, S, TREF, TEMP, SYSK, SYSF,
*MXPOI, MXELE, MXHBW, NPOIN)
C
    WRITE(6,450)
450 FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***')
    CALL APPLYBC(NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
    WRITE(6,460)
460 FORMAT(/, ' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS',
*      ' FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS ***' )
    WRITE(6,465) NEQ, NHBW
465 FORMAT(5X, '( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS WITH HALF-BANDWIDTH OF',
*      I4, ' )' , / )
C
    CALL SOLVE(NEQ, NHBW, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
C   PRINT OUT NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C
470 WRITE(6,480)
480 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT',
*      ' AND STRESS SOLUTIONS:', / )
    READ(5, '(A)', ERR=470) NAME2
    OPEN(UNIT=8, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=470)
C
    WRITE(8,485) NPOIN, NELEM, NHBW
485 FORMAT('THE FINITE ELEMENT MODEL ', /,
* 'CONSISTS OF', I5, ' NODES AND', I5, ' ELEMENTS ', /,
* 'AND HALF BAND WIDTH OF', I5 )
    WRITE(8,490) NPOIN
490 FORMAT(' NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [', I5, ']:',
*      /, 2X, 'NODE', 12X, 'U', 14X, 'W')
    DO 500 IP=1,NPOIN
        I1 = (IP-1)*NDF+1
        I2 = (IP-1)*NDF+2
        WRITE(8,510) IP, SYSF(I1), SYSF(I2)
510    FORMAT(I6, 5X, 2E16.7)
500 CONTINUE
C
C   COMPUTE NODAL STRESSES:
C
    DO 700 I=1,NPOIN
    SRR(I) = 0.
    SZZ(I) = 0.
    SOO(I) = 0.
    SRZ(I) = 0.
    ONE(I) = 0.
700 CONTINUE
C
C
C

```

```

CALL STRESS(NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, SYSF, ELAS, PR,
*ALPHA, TREF, TEMP, MXPOI, MXELE, SRR, SZZ, SOO, SRZ,
*ONE)

```

```

C
STOP
END
C
-----
C
SUBROUTINE APPLYBC(NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
APPLY DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODES OF:
C      0 = FREE TO MOVE
C      1 = FIXED
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
C
INTEGER IBC(MXPOI,2)
C
NDF = 2
DO 100 IN=1,NPOIN
DO 200 ID=1,NDF
IF(IBC(IN,ID).NE.1) GO TO 200
C
IEQ = (IN-1)*NDF + ID
SYSF(IEQ) = 0.
C
SYSK(IEQ,1) = 1.
DO 300 I=2,NHBW
SYSK(IEQ,I) = 0.
300 CONTINUE
C
IF(IEQ.EQ.1) GO TO 450
DO 400 N=1,IEQ-1
IROW = IEQ - N
ICOL = N + 1
IF(ICOL.GT.NHBW) GO TO 450
SYSK(IROW,ICOL) = 0.
400 CONTINUE
450 CONTINUE
C
200 CONTINUE
100 CONTINUE
C
RETURN
END
C
-----
C
SUBROUTINE ASSEMBLE( IE, INTMAT, SGBL, FGBL, SYSK, SYSF,
* MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL SGBL(6,6), FGBL(6)
REAL SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
C
INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
NNODE = 3
NDF = 2
C
DO 100 NR=1,NNODE
NODR = INTMAT(IE,NR)
DO 100 MR=1,NDF
C
DENOTE: NSR = ROW POSITION IN THE SYSTEM EQS.

```

```

C           NER = ROW POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
NSR = (NODR-1)*NDF + MR
NER = (NR -1)*NDF + MR
SYSF(NSR) = SYSF(NSR) + FGBL(NER)
C
DO 200 NC=1,NNODE
NODC = INTMAT(IE,NC)
DO 200 MC=1,NDF
C
DENOTE:   NSC = COLUMN POSITION IN THE SYSTEM EQS.
           (AFTER ROTATION - READY FOR BANDED SOLVER)
           NEC = COLUMN POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
NSC = (NODC-1)*NDF + MC - NSR + 1
NEC = (NC -1)*NDF + MC
IF(NSC.GT.0)
&     SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + SGBL(NER,NEC)
200 CONTINUE
C
100 CONTINUE
C
RETURN
END
C
-----
C
SUBROUTINE AXIS(NELEM, INTMAT, IEDGE1, IEDGE2, COORD, ELAS, PR,
*ALPHA, ANGVEL, GRAV, DENS, PR1, PZ1, PR2, PZ2, S, TREF, TEMP,SYSK,
*SYSF, MXPOI, MXELE, MXHBW, NPOIN)
C
COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQUATIONS
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL COORD(MXPOI,2), TEMP(MXPOI)
REAL SYSK(MXPOI*2,MXHBW), SYSF(MXPOI*2)
REAL STRA(6,6), FT(6), C(4,4), B(4,6), BT(6,4)
REAL FEB(6), FES(6), FET(6)
REAL DUMA(4,6), DUMB(4), AL(4)
REAL PR1(MXELE), PZ1(MXELE)
REAL PR2(MXELE), PZ2(MXELE)
C
INTEGER INTMAT(MXELE,3), IEDGE1(MXELE,2), IEDGE2(MXELE,2), S(MXELE)
C
LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
DO 5000 IE=1,NELEM
C
FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
II = INTMAT(IE,1)
JJ = INTMAT(IE,2)
KK = INTMAT(IE,3)
C
RG1 = COORD(II,1)
RG2 = COORD(JJ,1)
RG3 = COORD(KK,1)
ZG1 = COORD(II,2)
ZG2 = COORD(JJ,2)
ZG3 = COORD(KK,2)
C
AVGR = (RG1 + RG2 + RG3)/3.
AVGZ = (ZG1 + ZG2 + ZG3)/3.
C
A1 = RG2*ZG3-RG3*ZG2
A2 = RG3*ZG1-RG1*ZG3
A3 = RG1*ZG2-RG2*ZG1
C
B1 = ZG2-ZG3

```

```

B2 = ZG3-ZG1
B3 = ZG1-ZG2
C
C1 = RG3-RG2
C2 = RG1-RG3
C3 = RG2-RG1
C
C
AREA=1/2.*(A1 + A2 + A3)
C
C
IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
5 FORMAT(/,' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
*         ' HAS NEGATIVE OR ZERO VOLUME ', /,
*         ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
*         ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
IF(AREA.LE.0.) STOP
C
C
DO 110 I=1,4
DO 110 J=1,6
B(I,J) = 0.
110 CONTINUE
C
B(1,1) = B1
B(1,3) = B2
B(1,5) = B3
B(2,2) = C1
B(2,4) = C2
B(2,6) = C3
B(3,1) = A1/AVGR + B1 + C1*AVGZ/AVGR
B(3,3) = A2/AVGR + B2 + C2*AVGZ/AVGR
B(3,5) = A3/AVGR + B3 + C3*AVGZ/AVGR
B(4,1) = C1
B(4,2) = B1
B(4,3) = C2
B(4,4) = B2
B(4,5) = C3
B(4,6) = B3
C
DO 120 I=1,4
DO 130 J=1,6
B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
BT(J,I) = B(I,J)
130 CONTINUE
120 CONTINUE
C
C ELASTICITY MATRIX:
C
DO 140 I = 1,4
DO 150 J = 1,4
C(I,J) = 0.
150 CONTINUE
140 CONTINUE
FAC = ELAS/((1.+PR)*(1.-2.*PR))
C(1,1) = FAC*(1-PR)
C(1,2) = FAC*PR
C(1,3) = FAC*PR
C(2,1) = C(1,2)
C(2,2) = C(1,1)
C(2,3) = FAC*PR
C(3,1) = C(1,3)
C(3,2) = C(2,3)
C(3,3) = C(1,1)
C(4,4) = FAC*(1.-2.*PR)/2.
C
C ELEMENT STIFFNESS MATRIX:
C
DO 100 I=1,4

```

```

DO 100 J=1,6
DUMA(I,J) = 0.
DO 200 K=1,4
DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + C(I,K)*B(K,J)
200 CONTINUE
100 CONTINUE
C
DO 300 I=1,6
DO 300 J=1,6
STRA(I,J) = 0.
DO 400 K=1,4
STRA(I,J) = STRA(I,J) + BT(I,K)*DUMA(K,J)
400 CONTINUE
300 CONTINUE
C
DO 500 I=1,6
DO 500 J=1,6
STRA(I,J) = 2.*3.141592654*AVGR*AREA*STRA(I,J)
500 CONTINUE
C
C ELEMENT NODAL FORCE DUE TO THERMAL EXPANSION:
C
AL(1) = ALPHA
AL(2) = ALPHA
AL(3) = ALPHA
AL(4) = 0.
C
DO 600 I=1,4
DUMB(I) = 0.
DO 700 J=1,4
DUMB(I) = DUMB(I) + C(I,J)*AL(J)
700 CONTINUE
600 CONTINUE
C
DO 800 I=1,6
FET(I) = 0.
DO 900 J=1,4
FET(I) = FET(I) + BT(I,J)*DUMB(J)
900 CONTINUE
800 CONTINUE
C
C AVERAGE ELEMENT TEMPERATURE:
C
TAVG = (TEMP(II) + TEMP(JJ) + TEMP(KK))/3.
C
FAC = 2*3.141592654*AVGR*AREA*(TAVG - TREF)
DO 1000 I=1,6
FET(I) = FET(I)*FAC
1000 CONTINUE
C
C ELEMENT BODY FORCE DUE TO CENTRIFUGAL FORCE
C
FACB = 2*3.141592654*AVGR*AREA/3.
FACBR = FACB*(DENS*ANGVEL*ANGVEL*AVGR)
FACBZ = FACB*(-DENS*GRAV)
C
FEB(1) = FACBR
FEB(2) = FACBZ
FEB(3) = FACBR
FEB(4) = FACBZ
FEB(5) = FACBR
FEB(6) = FACBZ
C
C ELEMENT NADAL FORCE DUE TO SURFACE FORCE BY UNIFORM PRESSURE
C
DO 1200 IF = 1,6
FES(IF) = 0.
1200 CONTINUE

```

```

IF(S(IE).EQ.0.) GO TO 1310
C
C
IIS = S(IE)
DO 1210 IL = 1,IIS
  IF(S(IE).EQ.1) THEN
    IS = IEDGE1(IE,1)
    JS = IEDGE1(IE,2)
    PRR = PR1(IE)
    PZZ = PZ1(IE)
  ELSE
    IS = IEDGE2(IE,1)
    JS = IEDGE2(IE,2)
    PRR = PR2(IE)
    PZZ = PZ2(IE)
  ENDIF
  RI = COORD(IS,1)
  RJ = COORD(JS,1)
  ZI = COORD(IS,2)
  ZJ = COORD(JS,2)
  AVGRS = (RI + RJ)/2.
  DIFFZ = ABS(ZI - ZJ)
  FACS = 2.*3.141592654*AVGRS*DIFFZ/2.
C
  IF(IS.EQ.II) then
    IS = 1
  else
    IF(IS.EQ.JJ) then
      IS = 2
    else
      IF(IS.EQ.KK) then
        IS = 3
      else
        endif
      endif
    endif
  IF(JS.EQ.II) then
    JS = 1
  else
    IF(JS.EQ.JJ) then
      JS = 2
    else
      IF(JS.EQ.KK) then
        JS = 3
      else
        endif
      endif
    endif
  endif
C
  NNODE = 3.
  NDF = 2.
  DO 1300 I = 1,NNODE
    IF((I.NE.IS).AND.(I.NE.JS)) GO TO 1300
    IRR = (I-1)*NDF + 1.
    IRZ = (I-1)*NDF + 2.
    FES(IRR) = FACS*PRR + FES(IRR)
    FES(IRZ) = FACS*PZZ + FES(IRZ)
  1300 CONTINUE
  1210 CONTINUE
C
C
  FIND OF TOTAL FORCE OF ELEMENT
  1310 DO 1400 ISUM = 1,6
    FT(ISUM) = FEB(ISUM) + FES(ISUM) + FET(ISUM)
  1400 CONTINUE
C
C
  ASSEMBLE THESE ELEMENT EQUATIONS INTO THE SYSTEM EQUATIONS:

```

```

C
  CALL ASSMBLE( IE, INTMAT, STRA, FT, SYSK, SYSF,
*              MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
5000 CONTINUE
C
  RETURN
  END
C
-----
C
  SUBROUTINE SOLVE(NROW, NHBW, GSTIF, XL, MXPOI, MXHBW)
C
  SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS USING GAUSS ELIMINATION.
  THIS SOLVER ROUTINE CAN BE DESCRIBED BY USING AN EXAMPLE OF A
  SET OF FOUR SIMULTANEOUS EQUATIONS (AFTER APPLYING BOUNDARY
  CONDITIONS) AS SHOWN BELOW:
C
  [ A11  A12  A13   0 ]   [ X1 ]   [ F1 ]
C   [           ]   [   ]   [   ]
C   [ A12  A22  A23  A24 ]   [ X2 ]   [ F2 ]
C   [           ]   [   ]   =   [   ]
C   [ A13  A23  A33  A34 ]   [ X3 ]   [ F3 ]
C   [           ]   [   ]   [   ]
C   [ 0  A24  A34  A44 ]   [ X4 ]   [ F4 ]
C
  WHERE THE VARIABLE XL IS THE LOAD VECTOR ON RHS OF THE EQUATIONS.
  THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX ABOVE IS STORED IN THE VARIABLE
  GSTIF IN THE FORMAT SHOWN BELOW: (HERE NROW = 4 AND NHBW = 3)
C
  [ A11  A12  A13 ]
C   [           ]
C   [ A22  A23  A24 ]
C   [ GSTIF ] = [           ]
C   [ A33  A34   0 ]
C   [           ]
C   [ A44   0   0 ]
C
  AND THE OUTPUT SOLUTIONS WILL BE STORED IN THE VARIABLE XL.
C
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
  REAL GSTIF(MXPOI*2,MXHBW), XL(MXPOI*2)
C
  NR=NROW
  NC=NHBW
C
  DIAGONALIZATION THE MATRIX:
C
  DO 10 I=1,NR
  PIVOT1=GSTIF(I,1)
  IF (ABS(PIVOT1).LT.10.E-10) THEN
  WRITE(6,1025) I, PIVOT1
1025 FORMAT(' EQ. NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6,
* ' ** STOP **', //,
* ' *** CHECK NODE AND ELEMENT NUMBERING IN F.E. MODEL ***')
  STOP
  ENDIF
C
  XL(I)=XL(I)/PIVOT1
  DO 20 J=1,NC
20 GSTIF(I,J)=GSTIF(I,J)/PIVOT1
  MM=0
  DO 30 II=I+1,NR
  MM=MM+1
  IF(MM+1.GT.NC) GO TO 30
  PIVOT2=GSTIF(I,MM+1)*PIVOT1
  XL(II)=XL(II)-XL(I)*PIVOT2
  DO 40 JJ=1,NC

```

```

      JJJ=JJ+MM
      IF (JJJ.LE.NC)
        & GSTIF(II,JJ)=GSTIF(II,JJ)-GSTIF(I,JJJ)*PIVOT2
40    CONTINUE
30    CONTINUE
10    CONTINUE
C
C      BACK SUBSTITUTION:
C
      DO 70 I=NR-1,1,-1
      II=1
      DO 80 J=I+1,NR
      II=II+1
      IF (II.LE.NHBW) XL(I)=XL(I)-GSTIF(I,II)*XL(J)
80    CONTINUE
70    CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE STRESS(NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, DISP, ELAS, PR,
*      ALPHA, TREF, TEMP, MXPOI, MXELE, SRR, SZZ, SOO, SRZ, ONE)
C
C      COMPUTE NODAL STRESS COMPONENTS FOR TETRAHEDRAL ELEMENTS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL COORD(MXPOI,2), TEMP(MXPOI), DISP(MXPOI*2), ONE(MXPOI)
      REAL SRR(MXPOI), SZZ(MXPOI), SOO(MXPOI), SRZ(MXPOI)
C
      REAL C(4,4), B(4,6), EPS(4), UG(4), WG(4)
C
      INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
      PRINT OUT ELEMENT STRESSES:
      WRITE(8,11) NELEM
11  FORMAT( ' ELEMENTAL STRESS SOLUTIONS [', I5, ':', '/',
*          2X, 'ELEM', 11X, 'SRR', 11X, 'SZZ',
*          11X, 'SOO', 11X, 'SRZ' )
C
      LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
      DO 1000 IE=1,NELEM
C
      FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
C
      RG1 = COORD(II,1)
      RG2 = COORD(JJ,1)
      RG3 = COORD(KK,1)
      ZG1 = COORD(II,2)
      ZG2 = COORD(JJ,2)
      ZG3 = COORD(KK,2)
C
C
      AVGR = (RG1 + RG2 + RG3)/3.
      AVGZ = (ZG1 + ZG2 + ZG3)/3.
C
      A1 = RG2*ZG3-RG3*ZG2
      A2 = RG3*ZG1-RG1*ZG3
      A3 = RG1*ZG2-RG2*ZG1
C
      B1 = ZG2-ZG3
      B2 = ZG3-ZG1
      B3 = ZG1-ZG2

```



```

C
C1 = RG3-RG2
C2 = RG1-RG3
C3 = RG2-RG1

C
C
AREA=1/2.*(A1 + A2 + A3)

C
C
IF (AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
5 FORMAT(/,' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
*        ' HAS NEGATIVE OR ZERO VOLUME ', /,
*        ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
*        ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
IF (AREA.LE.0.) STOP

C
DO 110 I=1,4
DO 110 J=1,6
B(I,J) = 0.
110 CONTINUE

C
C
B(1,1) = B1
B(1,3) = B2
B(1,5) = B3
B(2,2) = C1
B(2,4) = C2
B(2,6) = C3
B(3,1) = A1/AVGR + B1 + C1*AVGZ/AVGR
B(3,3) = A2/AVGR + B2 + C2*AVGZ/AVGR
B(3,5) = A3/AVGR + B3 + C3*AVGZ/AVGR
B(4,1) = C1
B(4,2) = B1
B(4,3) = C2
B(4,4) = B2
B(4,5) = C3
B(4,6) = B3

C
DO 120 I=1,4
DO 130 J=1,6
B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
130 CONTINUE
120 CONTINUE

C
C ELASTICITY MATRIX:
C
DO 140 I = 1,4
DO 150 J = 1,4
C(I,J) = 0.
150 CONTINUE
140 CONTINUE

C
FAC = ELAS/((1.+PR)*(1.-2.*PR))
C(1,1) = FAC*(1-PR)
C(1,2) = FAC*PR
C(1,3) = FAC*PR
C(2,1) = C(1,2)
C(2,2) = C(1,1)
C(2,3) = FAC*PR
C(3,1) = C(1,3)
C(3,2) = C(2,3)
C(3,3) = C(1,1)
C(4,4) = FAC*(1.-2.*PR)/2.

C
C GATHER ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS:
C
NDOF = 2
DO 200 J1=1,3
I1 = INTMAT(IE,J1)

```

```

      IEQ = (I1-1)*NDOF + 1
      UG(J1) = DISP(IEQ)
      WG(J1) = DISP(IEQ+1)
200 CONTINUE
C
C   COMPUTE THE TOTAL STRAINS:
C
      DO 220 I=1,4
      EPS(I) = 0.
      DO 230 J=1,3
      J1 = (J-1)*NDOF + 1
      J2 = J1 + 1
      EPS(I) = EPS(I) + B(I,J1)*UG(J) + B(I,J2)*WG(J)
230 CONTINUE
220 CONTINUE
C
C   COMPUTE THERMAL STRAINS USING AVERAGE ELEMENT NODAL TEMPERATURES:
C
      TAVG = (TEMP(II) + TEMP(JJ) + TEMP(KK))/3.
C
C   COMPUTE THE NET STRAINS:
C
      EPS(1) = EPS(1) - ALPHA*(TAVG - TREF)
      EPS(2) = EPS(2) - ALPHA*(TAVG - TREF)
      EPS(3) = EPS(3) - ALPHA*(TAVG - TREF)
C
C   COMPUTE THE ELEMENT STRESSES:
C
      SRRE = C(1,1)*EPS(1) + C(1,2)*EPS(2) + C(1,3)*EPS(3)
      SZZE = C(2,1)*EPS(1) + C(2,2)*EPS(2) + C(2,3)*EPS(3)
      SOOE = C(3,1)*EPS(1) + C(3,2)*EPS(2) + C(3,3)*EPS(3)
      SRZE = C(4,4)*EPS(4)
C
C   COMPUTE NODAL STRESSES FROM ELEMENT STRESSES:
C
      SRR(II) = SRR(II) + SRRE
      SRR(JJ) = SRR(JJ) + SRRE
      SRR(KK) = SRR(KK) + SRRE
      SZZ(II) = SZZ(II) + SZZE
      SZZ(JJ) = SZZ(JJ) + SZZE
      SZZ(KK) = SZZ(KK) + SZZE
      SOO(II) = SOO(II) + SOOE
      SOO(JJ) = SOO(JJ) + SOOE
      SOO(KK) = SOO(KK) + SOOE
      SRZ(II) = SRZ(II) + SRZE
      SRZ(JJ) = SRZ(JJ) + SRZE
      SRZ(KK) = SRZ(KK) + SRZE
C
      ONE(II) = ONE(II) + 1.
      ONE(JJ) = ONE(JJ) + 1.
      ONE(KK) = ONE(KK) + 1.
C
C   PRINT OUT ELEMENTAL STRESS SOLUTION
      WRITE(8,12) IE,SRRE,SZZE,SOOE,SRZE
12 FORMAT(I6,4E14.6)
C
1000 CONTINUE
C
C   PRINT OUT THESE NODAL STRESSES:
C
      DO 1100 I=1,NPOIN
      IF(ONE(I).EQ.0.) WRITE(6,1200) I
1200 FORMAT(' *** WARNING *** NO STRESS CONTRIBUTION AT NODE', I5)
      IF(ONE(I).EQ.0.) ONE(I) = 1.
      SRR(I) = SRR(I)/ONE(I)
      SZZ(I) = SZZ(I)/ONE(I)
      SOO(I) = SOO(I)/ONE(I)
      SRZ(I) = SRZ(I)/ONE(I)
1100 CONTINUE

```

```
C
  WRITE(8,1300) NPOIN
1300 FORMAT( ' NODAL STRESS SOLUTIONS [', I5, ']:', /,
*          2X, 'NODE', 11X, 'SRR', 11X, 'SZZ',
*          11X, 'SOO', 11X, 'SRZ' )
  DO 1400 I=1,NPOIN
    WRITE(8,1500) I, SRR(I), SZZ(I), SOO(I), SRZ(I)
1500 FORMAT(I6, 4E14.6)
1400 CONTINUE
C
  PRINT OUT ELEMENT NODAL CONNECTION
  WRITE(8,*) 'ELEMENT NODAL CONNECTION'
  WRITE(8,13)
13 FORMAT(3X,'ELE',8X,'I',3X,'J',5X,'K')
  DO 1600 IE = 1,NELEM
    WRITE(8,14) IE,INTMAT(IE,1),INTMAT(IE,2),INTMAT(IE,3)
14 FORMAT(I5,5X,3I5)
1600 CONTINUE
C
  RETURN
  END
*****
```



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ค

รายละเอียดของโปรแกรม SOLID3D

รายละเอียดของโปรแกรม SOLID3D

โปรแกรม SOLID3D จะมีรายละเอียดเริ่มจากโปรแกรมหลักและตามด้วย โปรแกรมย่อย
ต่างๆทั้งหมดดังนี้

```
*****
*   PROGRAM STRES3D
*
*   A FINITE ELEMENT MECHANICAL/THERMAL STRESS ANALYSIS PROGRAM
*   FOR SOLID PROBLEM(THREE-DIMENSIONAL) OPERATIONING UNDER
*   STEAM PRESSURE, CENTRIFUGAL FORCE AND HIGH TEMPERATURE.
*****
C
C   THE VALUES DECLARED IN THE PARAMETER STATEMENT BELOW SHOULD
C   BE ASSIGNED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS
C
C   MXPOI = MAXIMUM NUMBER OF NODES IN THE MODEL
C   MXELE = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C   MXHBW = MAXIMUM NUMBER OF HALF-BANDWIDTH
C
C   PARAMETER (MXPOI=1134, MXELE=4000, MXHBW=300)
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   REAL COORD(MXPOI,3), TEMP(MXPOI)
C   REAL P1(MXELE,2), P2(MXELE,2), P3(MXELE,2)
C   REAL SYSK(MXPOI*3,MXHBW), SYSF(MXPOI*3)
C   REAL SXX(MXPOI),SYX(MXPOI),SZZ(MXPOI),SXY(MXPOI)
C   REAL SXZ(MXPOI),SYZ(MXPOI),ONE(MXPOI)
C
C   CHARACTER*20 NAME1, NAME2, TEXT1
C   CHARACTER*4  TEXT
C
C   INTEGER INTMAT(MXELE,4), IBC(MXPOI,3), S(MXELE)
C   INTEGER INTMATP1(MXELE,3), INTMATP2(MXELE,3), INTMATP3(MXELE,3)
C
10  WRITE(6,15)
15  FORMAT(/,'**FINITE ELEMENT FOR SOLVING DISPLACEMENT AND STRESS OF
*   TURBINE BLADE PROBLEM**',/, ' WITH CONSTANT PRESSURE AND CONSTANT
*   ANGULAR VELOCITY',/,
*   ' PLEASE INPUT THE FILE NAME OF INPUT DATA:',/)
C   READ(5, '(A)', ERR=10) NAME1
C   OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C   READ TITLE OF COMPUTATION:
C
C   READ(7,*) NLines
C   DO 100 ILine=1,NLines
C   READ(7,1) TEXT
1   FORMAT(A4)
100  CONTINUE
C
C   READ INPUT DATA:
C
C   READ(7,1) TEXT
C   READ(7,*) NPOIN, NELEM, NFORCE , NSGROP
C
C   IF(NPOIN.GT.MXPOI) WRITE(6,110) NPOIN
110  FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOI TO ', I5)
C   IF(NPOIN.GT.MXPOI) STOP
C   IF(NELEM.GT.MXELE) WRITE(6,120) NELEM
```

```

120 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO ', I5)
    IF(NELEM.GT.MXELE) STOP
    READ(7,1) TEXT
    READ(7,*) ELAS, PR, DENS, ALPHA, TREF, ANGVEL
    READ(7,1) TEXT
    DO 130 IP=1,NPOIN
    READ(7,*) I, (COORD(I,K), K=1,3)
C   2 FORMAT(T9,I8,T25,F8.0,T33,F8.0,T41,F8.0)
    IF(I.NE.IP) WRITE(6,135) IP
135 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
    IF(I.NE.IP) STOP
130 CONTINUE
    READ(7,1) TEXT
    DO 131 IP = 1,NPOIN
        READ(7,*) I, TEMP(I)
C   3   FORMAT(T17,I8,T25,F8.0)
        IF(I.NE.IP) WRITE(6,136) IP
136 FORMAT(/, ' NODAL TEMP. NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
        IF(I.NE.IP) STOP
131 CONTINUE
C
    DO 132 IP = 1,NPOIN
        DO 133 IC = 1,3
            IBC(IP,IC) = 0
133 CONTINUE
132 CONTINUE
    READ(7,1) TEXT
134 READ(7,*) TEXT1, IPP, ISPC
C 141 FORMAT(T1,A8,T17,I8,T25,I8)
    IF(TEXT1.EQ.'ENDCONST') GO TO 137
    DO 138 I = 1,3
        IF(ISPC.EQ.I) IBC(IPP,I) = 1
138 CONTINUE
        IF(ISPC.EQ.12) THEN
            IBC(IPP,1) = 1
            IBC(IPP,2) = 1
        ELSE
            ENDIF
        IF(ISPC.EQ.13) THEN
            IBC(IPP,1) = 1
            IBC(IPP,3) = 1
        ELSE
            ENDIF
        IF(ISPC.EQ.123) THEN
            IBC(IPP,1) = 1
            IBC(IPP,2) = 1
            IBC(IPP,3) = 1
        ELSE
            ENDIF
        IF(ISPC.EQ.23) THEN
            IBC(IPP,2) = 1
            IBC(IPP,3) = 1
        ELSE
            ENDIF
    IF(TEXT1.NE.'ENDCONST') GO TO 134
C
137 READ(7,1) TEXT
    DO 140 IE=1,NELEM
    READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,4)
C   4 FORMAT(T9,I8,T25,I8,T33,I8,T41,I8,T49,I8)
    IF(I.NE.IE) WRITE(6,150) IE
150 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
    IF(I.NE.IE) STOP
140 CONTINUE
C
C   NFORCE MEANS NUMBER OF NODES THAT SUPPORT THE EXTERNAL FORCE
C   NSGROP MEANS GROUP NUMBER OF ELEMENT THAT FACE TO PRESSURE
C   NESURF MEANS NUMBER OF ELEMENT THAT FACE TO PRESSURE IN EACH NSGROP
C

```

```

DO 200 ISF=1,NELEM
  S(ISF) = 0
200 CONTINUE
C
C   CONSIDER INTMATP OF THE ELEMENT THAT FACE TO PRESSURE
C   FROM EACH NSGROP
  IF(NSGROP.EQ.0) GO TO 240
  DO 205 IEP = 1,NELEM
    DO 207 JJ = 1,2
      P1(IEP,JJ) = 0.
      P2(IEP,JJ) = 0.
      P3(IEP,JJ) = 0.
    207 CONTINUE
    DO 206 J = 1,3
      INTMATP1(IEP,J) = 0.
      INTMATP2(IEP,J) = 0.
      INTMATP3(IEP,J) = 0.
    206 CONTINUE
  205 CONTINUE
C
  DO 210 IG = 1,NSGROP
    READ(7,1) TEXT
    220 IIC = 1
      READ(7,*) TEXT1, IEP, P, INP
      c 5   FORMAT(T1,A8,T17,I8,T25,F8.0,T65,I8)
      IF(TEXT1.EQ.'ENDGROUP') GO TO 210
      IF(S(IEP).EQ.0) THEN
        P1(IEP,1) = P
        P1(IEP,2) = INP
      ENDIF
      IF(S(IEP).EQ.1) THEN
        P2(IEP,1) = P
        P2(IEP,2) = INP
      ENDIF
      IF(S(IEP).EQ.2) THEN
        P3(IEP,1) = P
        P3(IEP,2) = INP
      ENDIF
      DO 230 IC = 1,4
        IF(INP.EQ.INTMAT(IEP,IC)) GO TO 230
        IF(S(IEP).EQ.0) INTMATP1(IEP,IIC) = INTMAT(IEP,IC)
        IF(S(IEP).EQ.1) INTMATP2(IEP,IIC) = INTMAT(IEP,IC)
        IF(S(IEP).EQ.2) INTMATP3(IEP,IIC) = INTMAT(IEP,IC)
        IIC = IIC+1
      230 CONTINUE
      S(IEP) = S(IEP)+1
      IF(TEXT1.NE.'ENDGROUP') GO TO 220
    210 CONTINUE
C
  240 NDF = 3
    NDOF = 12
    NEQ = NPOIN*NDF
    DO 300 I=1,NEQ
      SYSF(I) = 0.
    300 CONTINUE
    IF(NFORCE.EQ.0) GO TO 415
    READ(7,1) TEXT
    DO 310 II=1,NFORCE
      READ(7,*) N, FX, FY, FZ
      c 6   FORMAT(T17,I8,T41,F8.0,T49,F8.0,T57,F8.0)
      IEQ = (N-1)*NDF
      SYSF(IEQ+1) = FX
      SYSF(IEQ+2) = FY
      SYSF(IEQ+3) = FZ
    310 CONTINUE
C
C   COMPUTE HALF-BANDWIDTH:
C
  415 NHBW = 0

```

```

DO 400 IE=1,NELEM
MIN = 100000
MAX = 0
DO 410 IN=1,4
II = INTMAT(IE,IN)
IF(II.GT.MAX) MAX = II
IF(II.LT.MIN) MIN = II
410 CONTINUE
C
NDIF = MAX - MIN + 1
IF(NDIF.GT.NHBW) NHBW = NDIF
400 CONTINUE
C
NHBW = NHBW*NDF
IF(NHBW.GT.MXHBW) WRITE(6,420) NHBW
420 FORMAT(/,' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXHBW TO ', I5)
IF(NHBW.GT.MXHBW) STOP
C
DO 430 I=1,NEQ
DO 430 J=1,NHBW
SYSK(I,J) = 0.
430 CONTINUE
C
WRITE(6,435) NPOIN, NELEM
435 FORMAT(/,' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5,
* ' NODES AND', I5, ' ELEMENTS ***')
C
C LOOP OVER ALL ELEMENTS TO COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE
C THEM FOR SYSTEM MATRICES IN THE FORM NEEDED FOR MINIMUM MEMORY
C REQUIREMENT:
C
WRITE(6,440)
440 FORMAT(/,' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
* ' ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***' )
CALL TETRA(NELEM, INTMAT, INTMATP1, INTMATP2, INTMATP3,
*COORD, ELAS, PR, ALPHA, ANGVEL, DENS, P1, P2, P3, S, TREF,
*TEMP, SYSK, SYSF, MXPOI, MXELE, MXHBW)
C
WRITE(6,450)
450 FORMAT(/,' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***')
CALL APPLYBC(NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
WRITE(6,460)
460 FORMAT(/,' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS',
* ' FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS ***' )
MEM = 1288+144*MXPOI+104*MXELE+24*MXPOI*MXHBW
WRITE(6,465) NEQ, NHBW, MEM
465 FORMAT(5X,'( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS WITH HALF-BANDWIDTH OF',
* I4, ' )' ,/, ' REQUIRED MEMORY ABOUT ', I12, / )
C
CALL SOLVE(NEQ, NHBW, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
C PRINT OUT NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C
C
470 WRITE(6,480)
480 FORMAT(/,' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT'
* ' AND STRESS SOLUTIONS:',/ )
READ(5, '(A)', ERR=470) NAME2
OPEN(UNIT=8, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=470)
WRITE(8,485) NAME1,NPOIN, NELEM,NHBW
485 FORMAT(' THE FINITE ELEMENT MODEL OF INPUT FILE " ',A20,'" ,/,
* 'CONSISTS OF', I5, ' NODES AND', I5, ' ELEMENTS ',/,
* 'AND HALF BAND WIDTH OF', I5 ,/, ' MEMORY REQUIRED ', I12, ' bytes')
WRITE(8,490) NPOIN
490 FORMAT(' NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [' , I5, ']:',
* /,2X, 'NODE', 12X, 'U', 14X, 'V', 14X, 'W',
* 12X, 'R1', 12X, 'R2', 12X, 'R3')
DO 500 IP=1,NPOIN

```

```

      R = 0.
      I1 = (IP-1)*NDF+1
      I2 = (IP-1)*NDF+2
      I3 = (IP-1)*NDF+3
      WRITE(8,510) IP, SYSF(I1), SYSF(I2), SYSF(I3), R, R, R
510   FORMAT(16, 5X, 6E14.6)
500 CONTINUE
C
C
C   COMPUTE NODAL STRESSES:
C
      DO 700 I=1,NPOIN
      SXX(I) = 0.
      SYX(I) = 0.
      SZZ(I) = 0.
      SXY(I) = 0.
      SYZ(I) = 0.
      SXZ(I) = 0.
      ONE(I) = 0.
700 CONTINUE
C
C
C   PRINT OUT CHECK FILE :
C
      CALL STRESS(NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, SYSF, ELAS, PR,
*ALPHA, TREF, TEMP, MXPOI, MXELE, SXX, SYX, SZZ, SXY, SXZ,
*SYZ, ONE)
C
      STOP
      END
C
-----
C
      SUBROUTINE APPLYBC(NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
      APPLY DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODES OF:
      0 = FREE TO MOVE
      1 = FIXED
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL SYSK(MXPOI*3,MXHBW), SYSF(MXPOI*3)
C
      INTEGER IBC(MXPOI,3)
C
      NDF = 3
      DO 100 IN=1,NPOIN
      DO 200 ID=1,NDF
      IF(IBC(IN,ID).NE.1) GO TO 200
C
      IEQ = (IN-1)*NDF + ID
      SYSF(IEQ) = 0.
C
      SYSK(IEQ,1) = 1.
      DO 300 I=2,NHBW
      SYSK(IEQ,I) = 0.
300 CONTINUE
C
      IF(IEQ.EQ.1) GO TO 450
      DO 400 N=1,IEQ-1
      IROW = IEQ - N
      ICOL = N + 1
      IF(ICOL.GT.NHBW) GO TO 450
      SYSK(IROW,ICOL) = 0.
400 CONTINUE
450 CONTINUE
C
      200 CONTINUE
      100 CONTINUE
C

```



```

RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE ASSMBLE( IE, INTMAT, SGBL, FGBL, SYSK, SYSF,
*                   MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
C   ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   REAL SGBL(12,12), FGBL(12)
C   REAL SYSK(MXPOI*3,MXHBW), SYSF(MXPOI*3)
C
C   INTEGER INTMAT(MXELE,4)
C
C   NNODE = 4
C   NDF = 3
C
C   DO 100 NR=1,NNODE
C   NODR = INTMAT(IE,NR)
C   DO 100 MR=1,NDF
C
C   DENOTE: NSR = ROW POSITION IN THE SYSTEM EQS.
C           NER = ROW POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
C   NSR = (NODR-1)*NDF + MR
C   NER = (NR -1)*NDF + MR
C   SYSF(NSR) = SYSF(NSR) + FGBL(NER)
C
C   DO 200 NC=1,NNODE
C   NODC = INTMAT(IE,NC)
C   DO 200 MC=1,NDF
C
C   DENOTE: NSC = COLUMN POSITION IN THE SYSTEM EQS.
C           (AFTER ROTATION - READY FOR BANDED SOLVER)
C           NEC = COLUMN POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
C   NSC = (NODC-1)*NDF + MC - NSR + 1
C   NEC = (NC -1)*NDF + MC
C   IF(NSC.GT.0)
C   &   SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + SGBL(NER,NEC)
200 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END
C-----
C
SUBROUTINE TETRA(NELEM, INTMAT, INTMATP1, INTMATP2, INTMATP3,
*COORD, ELAS, PR, ALPHA, ANGVEL, DENS, P1, P2, P3, S, TREF,
*TEMP, SYSK, SYSF, MXPOI, MXELE, MXHBW)
C
C   COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQUATIONS
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   REAL COORD(MXPOI,3), TEMP(MXPOI)
C   REAL SYSK(MXPOI*3,MXHBW), SYSF(MXPOI*3)
C   REAL STRA(12,12), FT(12), C(6,6), B(6,12), BT(12,6)
C   REAL FEB(12), FES(12), FET(12)
C   REAL DUMA(6,12), DUMB(6), AL(6)
C   REAL P1(MXELE,2), P2(MXELE,2), P3(MXELE,2)
C   CHARACTER*20 NAME3
C
C   INTEGER INTMAT(MXELE,4), S(MXELE)
C   INTEGER INTMATP1(MXELE,3), INTMATP2(MXELE,3), INTMATP3(MXELE,3)
C   REAL CX,CY,CZ,FACC,P,NX,NY,NZ
C
C 4070 WRITE(6,4800)

```

```

C 4800 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR CHECKING',/)
C   READ(5, ' (A)', ERR=4070) NAME3
C   OPEN(UNIT=9, FILE=NAME3, STATUS='NEW', ERR=4070)
C
C   LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
C   DO 5000 IE=1,NELEM
C
C   FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
C   II = INTMAT(IE,1)
C   JJ = INTMAT(IE,2)
C   KK = INTMAT(IE,3)
C   LL = INTMAT(IE,4)
C
C   XG1 = COORD(II,1)
C   XG2 = COORD(JJ,1)
C   XG3 = COORD(KK,1)
C   XG4 = COORD(LL,1)
C   YG1 = COORD(II,2)
C   YG2 = COORD(JJ,2)
C   YG3 = COORD(KK,2)
C   YG4 = COORD(LL,2)
C   ZG1 = COORD(II,3)
C   ZG2 = COORD(JJ,3)
C   ZG3 = COORD(KK,3)
C   ZG4 = COORD(LL,3)
C
C   VOL=1/6.*((XG2-XG3)*YG4+(XG4-XG2)*YG3+(XG3-XG4)*YG2)*ZG1+
C   *{(XG1-XG4)*YG3+(XG3-XG1)*YG4+(XG4-XG3)*YG1)*ZG2+
C   *{(XG2-XG4)*YG1+(XG1-XG2)*YG4+(XG4-XG1)*YG2)*ZG3+
C   *{(XG1-XG3)*YG2+(XG3-XG2)*YG1+(XG2-XG1)*YG3)*ZG4)
C
C   IF(VOL.LE.0.) WRITE(6,5) IE
5  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
C   * ' HAS NEGATIVE OR ZERO VOLUME ', /,
C   * ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
C   * ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
C   IF(VOL.LE.0.) STOP
C
C   A1 = XG2*YG3*ZG4-XG2*ZG3*YG4-XG3*YG2*ZG4+XG3*ZG2*YG4+
C   *XG4*YG2*ZG3-XG4*ZG2*YG3
C   A2 = -XG1*YG3*ZG4+XG1*ZG3*YG4+XG3*YG1*ZG4-XG3*ZG1*YG4-
C   *XG4*YG1*ZG3+XG4*ZG1*YG3
C   A3 = XG1*YG2*ZG4-XG1*ZG2*YG4-XG2*YG1*ZG4+XG2*ZG1*YG4+
C   *XG4*YG1*ZG2-XG4*ZG1*YG2
C   A4 = -XG1*YG2*ZG3+XG1*ZG2*YG3+XG2*YG1*ZG3-XG2*ZG1*YG3-
C   *XG3*YG1*ZG2+XG3*ZG1*YG2
C   B1 = -YG3*ZG4+ZG3*YG4+YG2*ZG4-ZG2*YG4-YG2*ZG3+ZG2*YG3
C   B2 = YG3*ZG4-ZG3*YG4-YG1*ZG4+ZG1*YG4+YG1*ZG3-ZG1*YG3
C   B3 = -YG2*ZG4+ZG2*YG4+YG1*ZG4-ZG1*YG4-YG1*ZG2+ZG1*YG2
C   B4 = YG2*ZG3-ZG2*YG3-YG1*ZG3+ZG1*YG3+YG1*ZG2-ZG1*YG2
C   C1 = -XG2*ZG4+XG2*ZG3+XG3*ZG4-XG3*ZG2-XG4*ZG3+XG4*ZG2
C   C2 = XG1*ZG4-XG1*ZG3-XG3*ZG4+XG3*ZG1+XG4*ZG3-XG4*ZG1
C   C3 = -XG1*ZG4+XG1*ZG2+XG2*ZG4-XG2*ZG1-XG4*ZG2+XG4*ZG1
C   C4 = XG1*ZG3-XG1*ZG2-XG2*ZG3+XG2*ZG1+XG3*ZG2-XG3*ZG1
C   D1 = -XG2*YG3+XG2*YG4+XG3*YG2-XG3*YG4-XG4*YG2+XG4*YG3
C   D2 = XG1*YG3-XG1*YG4-XG3*YG1+XG3*YG4+XG4*YG1-XG4*YG3
C   D3 = -XG1*YG2+XG1*YG4+XG2*YG1-XG2*YG4-XG4*YG1+XG4*YG2
C   D4 = XG1*YG2-XG1*YG3-XG2*YG1+XG2*YG3+XG3*YG1-XG3*YG2
C
C   DO 110 I=1,6
C   DO 110 J=1,12
C   B(I,J) = 0.
110 CONTINUE
C
C   B(1,1) = B1
C   B(1,4) = B2
C   B(1,7) = B3

```

```

B(1,10) = B4
B(2,2) = C1
B(2,5) = C2
B(2,8) = C3
B(2,11) = C4
B(3,3) = D1
B(3,6) = D2
B(3,9) = D3
B(3,12) = D4
B(4,1) = C1
B(4,2) = B1
B(4,4) = C2
B(4,5) = B2
B(4,7) = C3
B(4,8) = B3
B(4,10) = C4
B(4,11) = B4
B(5,2) = D1
B(5,3) = C1
B(5,5) = D2
B(5,6) = C2
B(5,8) = D3
B(5,9) = C3
B(5,11) = D4
B(5,12) = C4
B(6,1) = D1
B(6,3) = B1
B(6,4) = D2
B(6,6) = B2
B(6,7) = D3
B(6,9) = B3
B(6,10) = D4
B(6,12) = B4

```

C

```

DO 120 I=1,6
DO 130 J=1,12
B(I,J) = B(I,J)/(6.*VOL)
BT(J,I) = B(I,J)

```

130 CONTINUE

120 CONTINUE

C

C

C

ELASTICITY MATRIX:

```

DO 140 I = 1,6
DO 150 J = 1,6
C(I,J) = 0.

```

150 CONTINUE

140 CONTINUE

$$FAC = ELAS / ((1.+PR) * (1.-2.*PR))$$

C(1,1) = FAC*(1-PR)

C(1,2) = FAC*PR

C(1,3) = FAC*PR

C(2,1) = C(1,2)

C(2,2) = C(1,1)

C(2,3) = FAC*PR

C(3,1) = C(1,3)

C(3,2) = C(2,3)

C(3,3) = C(1,1)

$$C(4,4) = FAC * (1.-2.*PR) / 2.$$

C(5,5) = C(4,4)

C(6,6) = C(4,4)

C

C

C

ELEMENT STIFFNESS MATRIX:

DO 100 I=1,6

DO 100 J=1,12

DUMA(I,J) = 0.

DO 200 K=1,6

DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + C(I,K)*B(K,J)

```

200 CONTINUE
100 CONTINUE
C
  DO 300 I=1,12
  DO 300 J=1,12
    STRA(I,J) = 0.
  DO 400 K=1,6
    STRA(I,J) = STRA(I,J) + BT(I,K)*DUMA(K,J)
  400 CONTINUE
  300 CONTINUE
C
  DO 500 I=1,12
  DO 500 J=1,12
    STRA(I,J) = STRA(I,J)*VOL
  500 CONTINUE
C
C   ELEMENT NODAL FORCE DUE TO THERMAL EXPANSION:
C
  AL(1) = ALPHA
  AL(2) = ALPHA
  AL(3) = ALPHA
  AL(4) = 0.
  AL(5) = 0.
  AL(6) = 0.
  DO 600 I=1,6
    DUMB(I) = 0.
  DO 700 J=1,6
    DUMB(I) = DUMB(I) + C(I,J)*AL(J)
  700 CONTINUE
  600 CONTINUE
C
  DO 800 I=1,12
    FET(I) = 0.
  DO 900 J=1,6
    FET(I) = FET(I) + BT(I,J)*DUMB(J)
  900 CONTINUE
  800 CONTINUE
C
C   AVERAGE ELEMENT TEMPERATURE:
C
  TAVG = (TEMP(II) + TEMP(JJ) + TEMP(KK) + TEMP(LL))/4.
  FAC = (TAVG - TREF)*VOL
  DO 1000 I=1,12
    FET(I) = FET(I)*FAC
  1000 CONTINUE
C
C   ELEMENT BODY FORCE DUE TO CENTRIFUGAL FORCE
C   (NEGLECT GRAVITATIONAL FORCE):
C
  AVX =(XG1 + XG2 + XG3 + XG4)/4.
  AVY =(YG1 + YG2 + YG3 + YG4)/4.
C
  FACB1 = DENS*ANGVEL*ANGVEL*AVX*VOL/4.
  FACB2 = DENS*ANGVEL*ANGVEL*AVY*VOL/4.
C
  FEB(1) = FACB1
  FEB(2) = FACB2
  FEB(3) = 0.
  FEB(4) = FACB1
  FEB(5) = FACB2
  FEB(6) = 0.
  FEB(7) = FACB1
  FEB(8) = FACB2
  FEB(9) = 0.
  FEB(10) = FACB1
  FEB(11) = FACB2
  FEB(12) = 0.
C
C   ELEMENT NADAL FORCE DUE TO SURFACE FORCE BY UNIFORM PRESSURE

```

```

C
DO 1200 IF = 1,12
FES(IF) = 0.
1200 CONTINUE
IF(S(IE).EQ.0.) GO TO 1310
C
C FIND AREA OF THE SURFACE THAT FACE TO PRESSURE
C FROM AREA = SQRT(S(S-A)*(S-B)*(S-C))
C
IIS = S(IE)
DO 1210 ISE = 1,IIS
IF(ISE.EQ.1) THEN
IS = INTMATP1(IE,1)
JS = INTMATP1(IE,2)
KS = INTMATP1(IE,3)
INP = P1(IE,2)
P = P1(IE,1)
ELSE
ENDIF
IF(ISE.EQ.2) THEN
IS = INTMATP2(IE,1)
JS = INTMATP2(IE,2)
KS = INTMATP2(IE,3)
INP = P2(IE,2)
P = P2(IE,1)
ELSE
ENDIF
IF(ISE.EQ.3) THEN
IS = INTMATP3(IE,1)
JS = INTMATP3(IE,2)
KS = INTMATP3(IE,3)
INP = P3(IE,2)
P = P3(IE,1)
ELSE
ENDIF
C
XS1 = COORD(IS,1)
XS2 = COORD(JS,1)
XS3 = COORD(KS,1)
YS1 = COORD(IS,2)
YS2 = COORD(JS,2)
YS3 = COORD(KS,2)
ZS1 = COORD(IS,3)
ZS2 = COORD(JS,3)
ZS3 = COORD(KS,3)
XSN = COORD(INP,1)
YSN = COORD(INP,2)
ZSN = COORD(INP,3)
C
C CHECKING FOR NORMAL VECTOR OF PLANE THAT POINT FROM PLANE TO INP
C
VOLP=1/6.*((XS2-XS3)*YSN+(XSN-XS2)*YS3+(XS3-XSN)*YS2)*ZS1+
*((XS1-XSN)*YS3+(XS3-XS1)*YSN+(XSN-XS3)*YS1)*ZS2+
*((XS2-XSN)*YS1+(XS1-XS2)*YSN+(XSN-XS1)*YS2)*ZS3+
*((XS1-XS3)*YS2+(XS3-XS2)*YS1+(XS2-XS1)*YS3)*ZSN)
IF(VOLP.LE.0) THEN
JSN = KS
KSN = JS
XS2 = COORD(JSN,1)
XS3 = COORD(KSN,1)
YS2 = COORD(JSN,2)
YS3 = COORD(KSN,2)
ZS2 = COORD(JSN,3)
ZS3 = COORD(KSN,3)
ENDIF
C
C FIND NORMAL VECTOR OF SURFACE THAT FACE TO PRESSURE
C

```

```

CX = (ZS2-ZS3)*YS1 + (ZS3-ZS1)*YS2 + (ZS1-ZS2)*YS3
CY = (XS2-XS3)*ZS1 + (XS3-XS1)*ZS2 + (XS1-XS2)*ZS3
CZ = (YS2-YS3)*XS1 + (YS3-YS1)*XS2 + (YS1-YS2)*XS3
FACC = SQRT(CX*CX+CY*CY+CZ*CZ)
C
C   FIND PX, PY, PZ
PX = P*CX/FACC
PY = P*CY/FACC
PZ = P*CZ/FACC
C
AA = XS2-XS1
AB = YS2-YS1
AC = ZS2-ZS1
BA = XS3-XS1
BB = YS3-YS1
BC = ZS3-ZS1
CA = XS3-XS2
CB = YS3-YS2
CC = ZS3-ZS2
C
SA = SQRT(AA*AA+AB*AB+AC*AC)
SB = SQRT(BA*BA+BB*BB+BC*BC)
SC = SQRT(CA*CA+CB*CB+CC*CC)
SL = (SA + SB + SC)/2.
DELA = SL - SA
DELB = SL - SB
DELC = SL - SC
SAREA = SQRT(SL*DELA*DELB*DELC)
C
CHECK
IF (IS.EQ.II) IS = 1
IF (IS.EQ.JJ) IS = 2
IF (IS.EQ.KK) IS = 3
IF (IS.EQ.LL) IS = 4
IF (JS.EQ.II) JS = 1
IF (JS.EQ.JJ) JS = 2
IF (JS.EQ.KK) JS = 3
IF (JS.EQ.LL) JS = 4
IF (KS.EQ.II) KS = 1
IF (KS.EQ.JJ) KS = 2
IF (KS.EQ.KK) KS = 3
IF (KS.EQ.LL) KS = 4
C
NNODE = 4
NDF = 3
DO 1300 I = 1,NNODE
IF ((I.NE.IS).AND.(I.NE.JS).AND.(I.NE.KS)) GO TO 1300
C
IRX = (I-1)*NDF + 1
IRY = (I-1)*NDF + 2
IRZ = (I-1)*NDF + 3
FES(IRX) = PX*SAREA/3. + FES(IRX)
FES(IRY) = PY*SAREA/3. + FES(IRY)
FES(IRZ) = PZ*SAREA/3. + FES(IRZ)
1300 CONTINUE
1210 CONTINUE
C
C   FIND OF TOTAL FORCE OF ELEMENT
1310 DO 1400 ISUM = 1,12
FT(ISUM) = FEB(ISUM) + FES(ISUM) + FET(ISUM)
1400 CONTINUE
C
C
C   ASSEMBLE THESE ELEMENT EQUATIONS INTO THE SYSTEM EQUATIONS:
C
CALL ASSMBLE( IE, INTMAT, STRA, FT, SYSK, SYSF,
*             MXPOI, MXELE, MXHBW )
C
5000 CONTINUE
C

```

```

RETURN
END
C
C-----
C
C      SUBROUTINE SOLVE(NROW, NHBW, GSTIF, XL, MXPOI, MXHBW)
C
C      SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS USING GAUSS ELIMINATION.
C      THIS SOLVER ROUTINE CAN BE DESCRIBED BY USING AN EXAMPLE OF A
C      SET OF FOUR SIMULTANEOUS EQUATIONS (AFTER APPLYING BOUNDARY
C      CONDITIONS) AS SHOWN BELOW:
C
C      [ A11  A12  A13    0 ]   [ X1 ]   [ F1 ]
C      [          ]   [   ]   [   ]
C      [ A12  A22  A23  A24 ]   [ X2 ]   [ F2 ]
C      [          ]   [   ]   =   [   ]
C      [ A13  A23  A33  A34 ]   [ X3 ]   [ F3 ]
C      [          ]   [   ]   [   ]
C      [  0  A24  A34  A44 ]   [ X4 ]   [ F4 ]
C
C      WHERE THE VARIABLE XL IS THE LOAD VECTOR ON RHS OF THE EQUATIONS.
C      THE GLOBAL STIFFNESS MATRIX ABOVE IS STORED IN THE VARIABLE
C      GSTIF IN THE FORMAT SHOWN BELOW: (HERE NROW = 4 AND NHBW = 3)
C
C      [ A11  A12  A13 ]
C      [          ]
C      [ A22  A23  A24 ]
C      [ GSTIF ]   =   [          ]
C      [ A33  A34  0 ]
C      [          ]
C      [ A44  0  0 ]
C
C      AND THE OUTPUT SOLUTIONS WILL BE STORED IN THE VARIABLE XL.
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C      REAL GSTIF(MXPOI*3,MXHBW), XL(MXPOI*3)
C
C      NR=NROW
C      NC=NHBW
C
C      DIAGONALIZATION THE MATRIX:
C
C      DO 10 I=1,NR
C      PIVOT1=GSTIF(I,1)
C      IF(ABS(PIVOT1).LT.10.E-10) THEN
C      WRITE(6,1025) I, PIVOT1
1025  FORMAT(' EQ. NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6,
*      ' ** STOP **', //,
*      ' *** CHECK NODE AND ELEMENT NUMBERING IN F.E. MODEL ***')
C      STOP
C      ENDIF
C
C      XL(I)=XL(I)/PIVOT1
C      DO 20 J=1,NC
20  GSTIF(I,J)=GSTIF(I,J)/PIVOT1
C      MM=0
C      DO 30 II=I+1,NR
C      MM=MM+1
C      IF(MM+1.GT.NC) GO TO 30
C      PIVOT2=GSTIF(I,MM+1)*PIVOT1
C      XL(II)=XL(II)-XL(I)*PIVOT2
C      DO 40 JJ=1,NC
C      JJJ=JJ+MM
C      IF(JJJ.LE.NC)
& GSTIF(II,JJ)=GSTIF(II,JJ)-GSTIF(I,JJJ)*PIVOT2
C      40 CONTINUE
C      30 CONTINUE
C      10 CONTINUE

```

```

C
C   BACK SUBSTITUTION:
C
      DO 70 I=NR-1,1,-1
      II=1
      DO 80 J=I+1,NR
      II=II+1
      IF (II.LE.NHBW) XL(I)=XL(I)-GSTIF(I,II)*XL(J)
80 CONTINUE
70 CONTINUE

C
      RETURN
      END

C
C-----
C
      SUBROUTINE STRESS(NPOIN, NELEM, INTMAT, COORD, DISP, ELAS, PR,
*ALPHA, TREF, TEMP, MXPOI, MXELE, SXX, SYX, SZX, SXY, SXZ, SYZ
*, ONE)

C
C   COMPUTE NODAL STRESS COMPONENTS FOR TETRAHEDRAL ELEMENTS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL COORD(MXPOI,3), TEMP(MXPOI), DISP(MXPOI*3), ONE(MXPOI)
      REAL SXX(MXPOI), SYX(MXPOI), SZX(MXPOI), SXY(MXPOI)
      REAL SYZ(MXPOI), SXZ(MXPOI)

C
      REAL C(6,6), B(6,12), EPS(6), UG(6), VG(6), WG(6)

C
      INTEGER INTMAT(MXELE,4)

C
      PRINT OUT ELEMENT STRESSES:
      WRITE(8,11) NELEM
11 FORMAT( ' ELEMENTAL STRESS SOLUTIONS [', I5, ']:',/,
*          2X, 'ELEM', 11X, 'SXX', 11X, 'SYX', 11X, 'SZX',
*          11X, 'SXY', 11X, 'SXZ', 11X, 'SYZ' )

C
      LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:

C
      DO 1000 IE=1,NELEM

C
      FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:

C
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
      LL = INTMAT(IE,4)

C
      XG1 = COORD(II,1)
      XG2 = COORD(JJ,1)
      XG3 = COORD(KK,1)
      XG4 = COORD(LL,1)
      YG1 = COORD(II,2)
      YG2 = COORD(JJ,2)
      YG3 = COORD(KK,2)
      YG4 = COORD(LL,2)
      ZG1 = COORD(II,3)
      ZG2 = COORD(JJ,3)
      ZG3 = COORD(KK,3)
      ZG4 = COORD(LL,3)
      VOL=1./6.*(((XG2-XG3)*YG4+(XG4-XG2)*YG3+(XG3-XG4)*YG2)*ZG1+
* ((XG1-XG4)*YG3+(XG3-XG1)*YG4+(XG4-XG3)*YG1)*ZG2+
* ((XG2-XG4)*YG1+(XG1-XG2)*YG4+(XG4-XG1)*YG2)*ZG3+
* ((XG1-XG3)*YG2+(XG3-XG2)*YG1+(XG2-XG1)*YG3)*ZG4)

C
      B1 = -YG3*ZG4+ZG3*YG4+YG2*ZG4-ZG2*YG4-YG2*ZG3+ZG2*YG3
      B2 = YG3*ZG4-ZG3*YG4-YG1*ZG4+ZG1*YG4+YG1*ZG3-ZG1*YG3
      B3 = -YG2*ZG4+ZG2*YG4+YG1*ZG4-ZG1*YG4-YG1*ZG2+ZG1*YG2
      B4 = YG2*ZG3-ZG2*YG3-YG1*ZG3+ZG1*YG3+YG1*ZG2-ZG1*YG2

```



```

C1 = -XG2*ZG4+XG2*ZG3+XG3*ZG4-XG3*ZG2-XG4*ZG3+XG4*ZG2
C2 = XG1*ZG4-XG1*ZG3-XG3*ZG4+XG3*ZG1+XG4*ZG3-XG4*ZG1
C3 = -XG1*ZG4+XG1*ZG2+XG2*ZG4-XG2*ZG1-XG4*ZG2+XG4*ZG1
C4 = XG1*ZG3-XG1*ZG2-XG2*ZG3+XG2*ZG1+XG3*ZG2-XG3*ZG1
D1 = -XG2*YG3+XG2*YG4+XG3*YG2-XG3*YG4-XG4*YG2+XG4*YG3
D2 = XG1*YG3-XG1*YG4-XG3*YG1+XG3*YG4+XG4*YG1-XG4*YG3
D3 = -XG1*YG2+XG1*YG4+XG2*YG1-XG2*YG4-XG4*YG1+XG4*YG2
D4 = XG1*YG2-XG1*YG3-XG2*YG1+XG2*YG3+XG3*YG1-XG3*YG2

```

```

C
DO 110 I=1,6
DO 110 J=1,12
B(I,J) = 0.

```

```
110 CONTINUE
```

```

C
B(1,1) = B1
B(1,4) = B2
B(1,7) = B3
B(1,10) = B4
B(2,2) = C1
B(2,5) = C2
B(2,8) = C3
B(2,11) = C4
B(3,3) = D1
B(3,6) = D2
B(3,9) = D3
B(3,12) = D4
B(4,1) = C1
B(4,2) = B1
B(4,4) = C2
B(4,5) = B2
B(4,7) = C3
B(4,8) = B3
B(4,10) = C4
B(4,11) = B4
B(5,2) = D1
B(5,3) = C1
B(5,5) = D2
B(5,6) = C2
B(5,8) = D3
B(5,9) = C3
B(5,11) = D4
B(5,12) = C4
B(6,1) = D1
B(6,3) = B1
B(6,4) = D2
B(6,6) = B2
B(6,7) = D3
B(6,9) = B3
B(6,10) = D4
B(6,12) = B4

```

```

C
DO 120 I=1,6
DO 130 J=1,12
B(I,J) = B(I,J)/(6.*VOL)

```

```
130 CONTINUE
```

```
120 CONTINUE
```

```

C
C
ELASTICITY MATRIX:

```

```

DO 140 I = 1,6
DO 150 J = 1,6
C(I,J) = 0.
150 CONTINUE
140 CONTINUE
FAC = ELAS/((1.+PR)*(1.-2.*PR))
C(1,1) = FAC*(1-PR)
C(1,2) = FAC*PR
C(1,3) = FAC*PR
C(2,1) = C(1,2)

```

```

C(2,2) = C(1,1)
C(2,3) = FAC*PR
C(3,1) = C(1,3)
C(3,2) = C(2,3)
C(3,3) = C(1,1)
C(4,4) = FAC*(1.-2.*PR)/2.
C(5,5) = C(4,4)
C(6,6) = C(4,4)

C
C   GATHER ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS:
C
DO 200 J1=1,4
  I1 = INTMAT(IE,J1)
  IEQ = (I1-1)*3 + 1
  UG(J1) = DISP(IEQ)
  VG(J1) = DISP(IEQ+1)
  WG(J1) = DISP(IEQ+2)
200 CONTINUE

C
C   COMPUTE THE TOTAL STRAINS:
C
DO 220 I=1,6
  EPS(I) = 0.
DO 230 J=1,4
  J1 = (J-1)*3 + 1
  J2 = J1 + 1
  J3 = J1 + 2
  EPS(I) = EPS(I) + B(I,J1)*UG(J) + B(I,J2)*VG(J) + B(I,J3)*WG(J)
230 CONTINUE
220 CONTINUE

C
C   COMPUTE THERMAL STRAINS USING AVERAGE ELEMENT NODAL TEMPERATURES:
C
TAVG = (TEMP(II) + TEMP(JJ) + TEMP(KK) + TEMP(LL))/4.

C
C   COMPUTE THE NET STRAINS:
C
EPS(1) = EPS(1) - ALPHA*(TAVG - TREF)
EPS(2) = EPS(2) - ALPHA*(TAVG - TREF)
EPS(3) = EPS(3) - ALPHA*(TAVG - TREF)

C
C   COMPUTE THE ELEMENT STRESSES:
C
SXXE = C(1,1)*EPS(1) + C(1,2)*EPS(2) + C(1,3)*EPS(3)
SYYE = C(2,1)*EPS(1) + C(2,2)*EPS(2) + C(2,3)*EPS(3)
SZZE = C(3,1)*EPS(1) + C(3,2)*EPS(2) + C(3,3)*EPS(3)
SKYE = C(4,4)*EPS(4)
SYZE = C(5,5)*EPS(5)
SXZE = C(6,6)*EPS(6)

C
C   COMPUTE NODAL STRESSES FROM ELEMENT STRESSES:
C
SXX(II) = SXX(II) + SXXE
SXX(JJ) = SXX(JJ) + SXXE
SXX(KK) = SXX(KK) + SXXE
SXX(LL) = SXX(LL) + SXXE
SYY(II) = SYY(II) + SYYE
SYY(JJ) = SYY(JJ) + SYYE
SYY(KK) = SYY(KK) + SYYE
SYY(LL) = SYY(LL) + SYYE
SZZ(II) = SZZ(II) + SZZE
SZZ(JJ) = SZZ(JJ) + SZZE
SZZ(KK) = SZZ(KK) + SZZE
SZZ(LL) = SZZ(LL) + SZZE
SXY(II) = SXY(II) + SKYE
SXY(JJ) = SXY(JJ) + SKYE
SXY(KK) = SXY(KK) + SKYE
SXY(LL) = SXY(LL) + SKYE
SYZ(II) = SYZ(II) + SYZE
SYZ(JJ) = SYZ(JJ) + SYZE
SYZ(KK) = SYZ(KK) + SYZE

```

```

SYZ(LL) = SYZ(LL) + SYZE
SXZ(II) = SXZ(II) + SXZE
SXZ(JJ) = SXZ(JJ) + SXZE
SXZ(KK) = SXZ(KK) + SXZE
SXZ(LL) = SXZ(LL) + SXZE
C
ONE(II) = ONE(II) + 1.
ONE(JJ) = ONE(JJ) + 1.
ONE(KK) = ONE(KK) + 1.
ONE(LL) = ONE(LL) + 1.
C
C PRINT OUT ELEMENTAL STRESS SOLUTION
WRITE(8,12) IE,SXXE,SYYE,SZZE,SXYE,SXZE,SYZE
12 FORMAT(I6,6E14.6)
C
1000 CONTINUE
C
C PRINT OUT THESE NODAL STRESSES:
C
DO 1100 I=1,NPOIN
IF(ONE(I).EQ.0.) WRITE(6,1200) I
1200 FORMAT(' *** WARNING *** NO STRESS CONTRIBUTION AT NODE', I5)
IF(ONE(I).EQ.0.) ONE(I) = 1.
SXX(I) = SXX(I)/ONE(I)
SYY(I) = SYY(I)/ONE(I)
SZZ(I) = SZZ(I)/ONE(I)
SXY(I) = SXY(I)/ONE(I)
SYZ(I) = SYZ(I)/ONE(I)
SXZ(I) = SXZ(I)/ONE(I)
1100 CONTINUE
C
WRITE(8,1300) NPOIN
1300 FORMAT(' NODAL STRESS SOLUTIONS [', I5, ']:', /,
* 2X, 'NODE', 11X, 'SXX', 11X, 'SYY', 11X, 'SZZ',
* 11X, 'SXY', 11X, 'SXZ', 11X, 'SYZ' )
DO 1400 I=1,NPOIN
WRITE(8,1500) I, SXX(I), SYY(I), SZZ(I), SXY(I), SXZ(I), SYZ(I)
1500 FORMAT(I6, 6E14.6)
1400 CONTINUE
C
C PRINT OUT ELEMENT NODAL CONNECTION
WRITE(8,*) 'ELEMENT NODAL CONNECTION'
WRITE(8,13)
13 FORMAT(3X,'ELE',8X,'I',3X,'J',5X,'K',4X,'L')
DO 1600 IE = 1,NELEM
WRITE(8,14) IE,INTMAT(IE,1),INTMAT(IE,2),INTMAT(IE,3),INTMAT(IE,4)
14 FORMAT(I5,5X,4I5)
1600 CONTINUE
C
RETURN
END
*****

```

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

